MUSEU DE TOPOGRAFIA PROF. LAUREANO IBRAHIM CHAFFE
DEPARTAMENTO DE GEODÉSIA – UFRGS

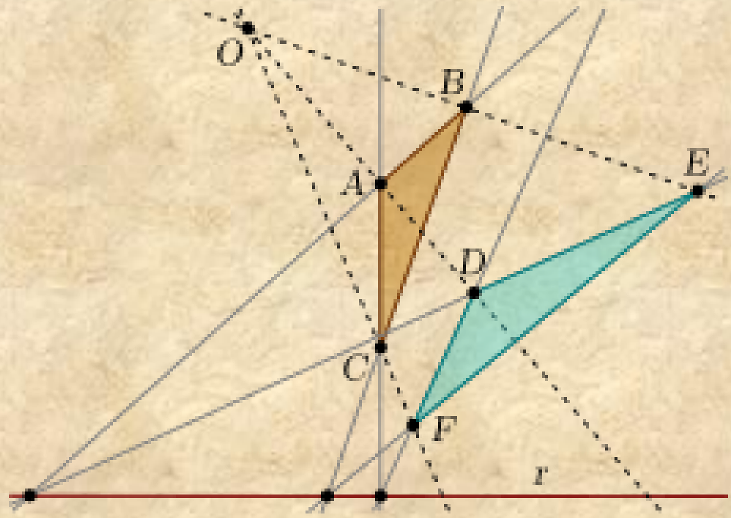
A GEOMETRIA

Texto original**: Wikipédia, a enciclopédia livre.**

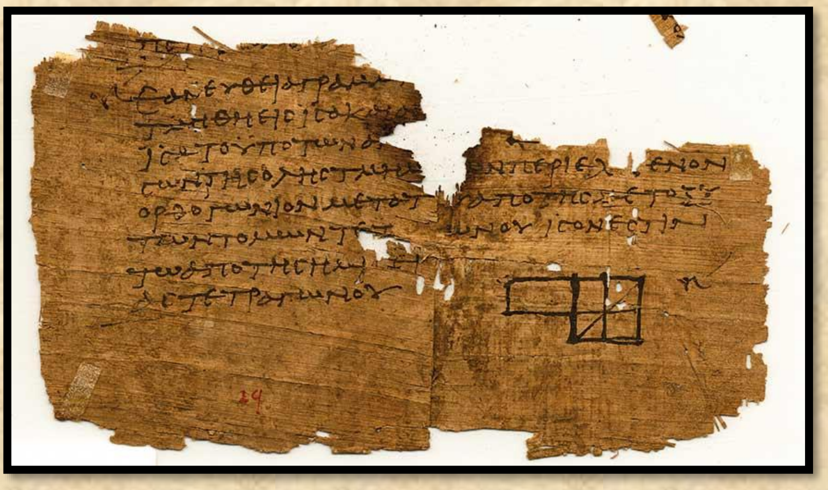
Julho/2022

Ampliação e ilustrações**: Iran Carlos Stalliviere Corrêa-IG/UFRGS**

Geometria



Teorema de Desargues, um resultado importante nas geometrias euclidiana e projetiva
(Fonte: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/1/13/Teorema_de_desargues.svg/1200px-Teorema_de_desargues.svg.png)



Fragmento dos Elementos de Euclides
(Fonte: https://nationalgeographic.pt/images/revistas/artigos_edicoes_especiais/EUCLIDES_MAR2017/papiro.jpg)

A **geometria** (em grego clássico: *γεωμετρία*; *geo-* "terra", *-metria* "medida") é um ramo da matemática preocupado com questões de forma, tamanho e posição relativa de figuras e com as propriedades dos espaços.

Um matemático que trabalha no campo da geometria é denominado de **geômetra**.

A **geometria** surgiu independentemente em várias culturas antigas como um conjunto de conhecimentos práticos sobre comprimento, área e volume.

Por volta do século III a.C., a **geometria** foi posta em uma forma axiomática por **Euclides**, cujo tratamento, chamado de **geometria euclidiana**, estabeleceu um padrão que perdurou por séculos, ainda que não refletisse a matemática de sua época.

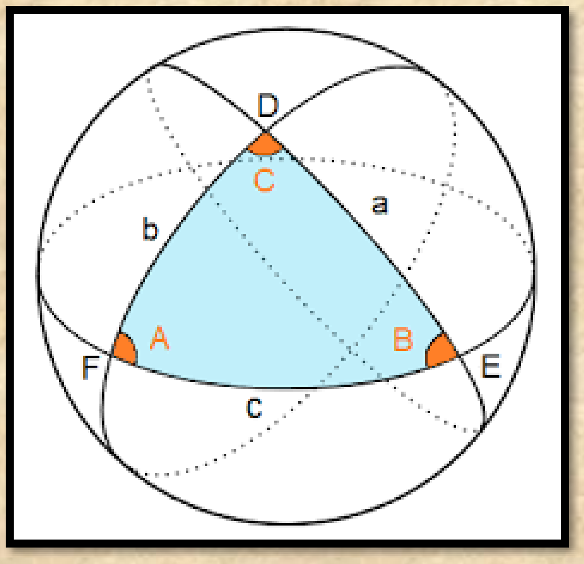
Arquimedes, por exemplo, desenvolveu técnicas engenhosas para calcular áreas e volumes sem se preocupar com o tratamento axiomático dos *Elementos*.

Euclides

Arquimedes

(Fonte Euclides: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/30/Euklid-von-Alexandria_1.jpg)

(Fonte Arquimedes: https://cdn.pensador.com/img/authors/ar/qu/arquimedes-l.jpg)



Geometria esférica
(Fonte: https://noic.com.br/wp-content/uploads/2021/02/Tri%C3%A2ngulo-Esf%C3%A9rico.png)

A **geometria esférica** é um exemplo de geometria não-euclidiana. Ela tem aplicações práticas em navegação e astronomia.

A partir da experiência, ou, eventualmente, intuitivamente, as pessoas caracterizam o espaço por certas qualidades fundamentais, que são denominadas **axiomas de geometria** (como, por exemplo, os axiomas de Hilbert). Esses **axiomas** não são provados, mas podem ser usados em conjunto com os conceitos matemáticos de ponto, linha reta, linha curva, superfície e sólido para chegar a conclusões lógicas, chamadas de **teoremas**.

Kepler
(Fonte: https://s2.glbimg.com/p17w3iCILumj0e3Ow4z2PCochr4=/e.glbimg.com/og/ed/f/original/2020/01/20/johannes_kepler_1610.jpg)

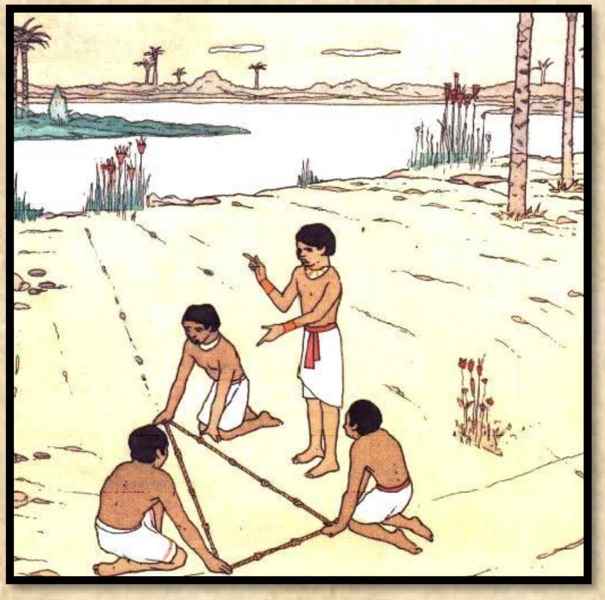
A influência da **geometria** sobre as ciências físicas foi enorme. Como exemplo, quando o astrônomo **Kepler** mostrou que as relações entre as velocidades máximas e mínimas dos planetas, propriedades intrínsecas das órbitas, estavam em razões que eram harmônicas — relações musicais —, ele afirmou que essa era uma música que só podia ser percebida com os ouvidos da alma — a mente do **geômetra**.

Com a introdução da **geometria analítica**, muitos problemas de álgebra puderam ser transformados em problemas de geometria e vice-versa, muitas vezes conduzindo à simplificação das soluções.

História

Egito Antigo

A **matemática** surgiu de necessidades básicas, em especial da necessidade econômica de contabilizar diversos tipos de objetos. De forma semelhante, a origem da ***geometria*** (do grego *geo* =terra + *metria*= medida, ou seja, "medir terra") está intimamente ligada à necessidade de melhorar o sistema de arrecadação de impostos de áreas rurais, e foram os antigos egípcios que deram os primeiros passos para o desenvolvimento da disciplina.



Agrimensores egípcios

(Fonte: https://www.marcelouva.com.br/wp-content/uploads/2019/08/geometria.jpg)

Todos os anos o rio Nilo extravasava as margens e inundava o seu delta. A boa notícia era a de que as cheias depositavam nos campos de cultivo lamas aluviais ricas em nutrientes, tornando o delta do Nilo a mais fértil terra lavrável do mundo antigo. A má notícia consistia em que o rio destruía as marcas físicas de delimitação entre as possessões de terra, gerando conflitos entre indivíduos e comunidades sobre o uso dessa terra não delimitada.

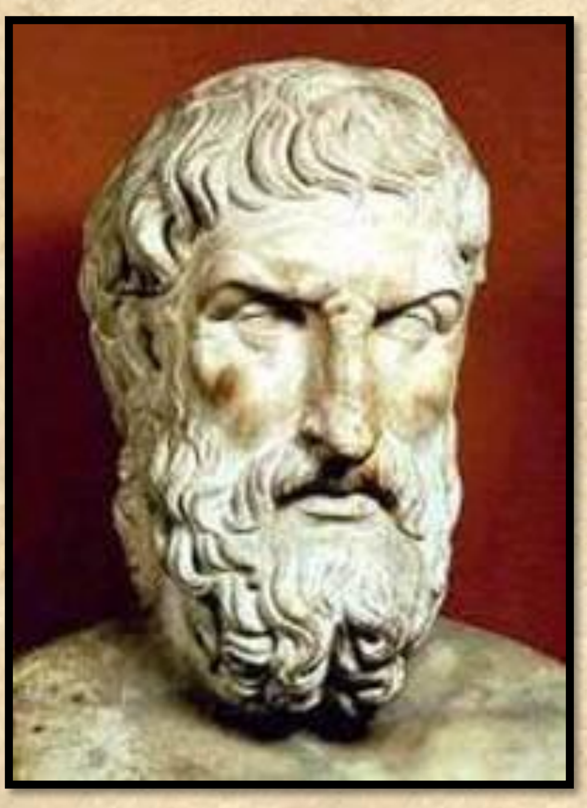
A dimensão desses conflitos pode ser apreciada na repercussão que se encontra no ***Livro dos Mortos*** do Egito, onde uma pessoa acabada de falecer tem de jurar aos deuses que não enganou o vizinho, roubando-lhe terra. Era um pecado punível com ter o coração comido por uma besta horrível chamada o «**devorador**».

Roubar a terra do vizinho era considerado uma ofensa tão grave como quebrar um juramento ou assassinar alguém. Sem marcos fronteiriços, os agricultores e administradores de templos, palácios e demais unidades produtivas fundadas na agricultura não tinham referência clara do limite das suas possessões para poderem cultivá-la e pagarem os impostos devidos na medida da sua extensão aos governantes.

Esticadores de corda (Agrimensores egípcios)
(Fonte: http://4.bp.blogspot.com/-X5PRQOKwBnI/T6kbqh-77vI/AAAAAAAAAGc/1k6bEoUJ-i0/w1200-h630-p-k-no-nu/ESTICADORES+DE+CORDAS.png)

Os antigos faraós resolveram passar a nomear funcionários, os **agrimensores**, cuja tarefa era avaliar os prejuízos das cheias e restabelecer as fronteiras entre as diversas posses. Foi assim que nasceu a **geometria.** Estes agrimensores, ou ***esticadores de corda*** (assim chamados devido aos instrumentos de medida e cordas entrelaçadas concebidas para marcar ângulos retos), acabaram por aprender a determinar as áreas de lotes de terreno dividindo-os em retângulos e triângulos.

A origem da **geometria** se situar no Egito é muito em função dos trabalhos do antigo historiador **Heródoto**, que defendia que a **geometria** teria sido inventada a partir das necessidades práticas, enquanto que os gregos teriam se apropriado dessa **geometria** e teriam adicionado a argumentação dedutiva e o pensamento abstrato. No entanto, essa tese não é mais sustentada pelos historiadores, uma vez que há diversos outros registros de práticas geométricas em civilizações como na Mesopotâmia Antiga ou no extremo oriente.



Heródoto

(Fonte: https://www.sohistoria.com.br/biografias/herodoto/index_clip_image002.jpg)

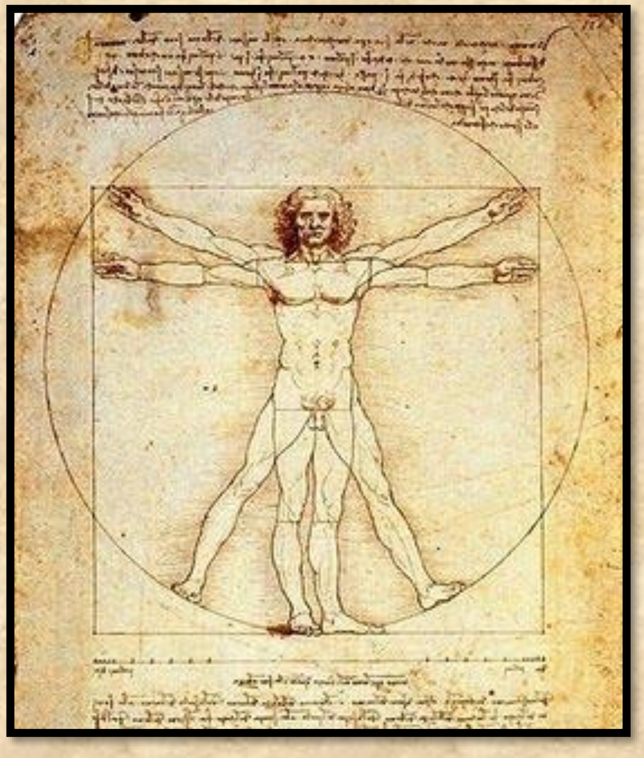
Os três problemas clássicos da geometria

Ao longo da história, três problemas se tornaram clássicos: **a quadratura do círculo, a duplicação do cubo e a trissecção do ângulo**.

Esses problemas se tornaram populares, pois, por muito tempo, acreditava-se que seria possível resolvê-los apenas com régua e compasso, como determina a tradição euclidiana.

Alguns matemáticos propuseram soluções para tais problemas utilizando outros recursos. De fato, qualquer um dos problemas clássicos da **Geometria** têm solução trivial por meio da álgebra ou ainda por meio de **geometria** a partir de curvas mecânicas, como a espiral de Arquimedes, ou outros instrumentos. Somente a partir do século XIX tornou-se aceito pela comunidade matemática a impossibilidade de resolver tais problemas apenas com régua e compasso.

O primeiro problema: A quadratura do círculo



A Quadratura do círculo

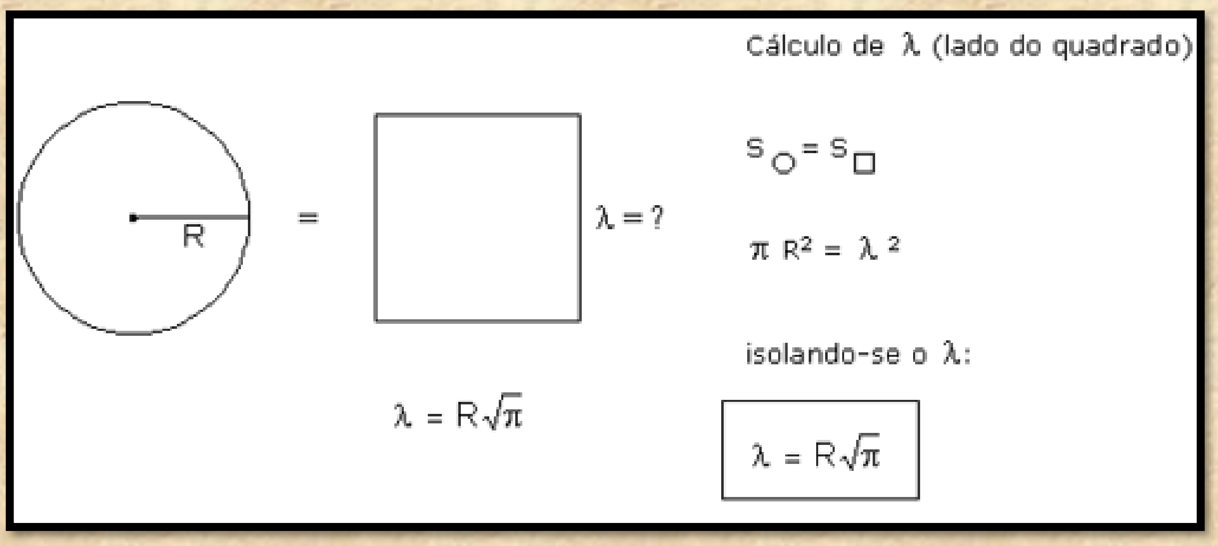
(Fonte: http://2.bp.blogspot.com/_j-loEH8jvyw/S9y7mCx3JFI/AAAAAAAAALE/M39fUSR1fJI/s320/Figura+4.21.jpg)

O Problema da Quadratura do Círculo

O problema da **quadratura do círculo** foi proposto por **Anaxágoras** (499-428 a.C.): dado um círculo, construir um quadrado de mesma área. Como os gregos desconheciam as operações algébricas e priorizavam a **Geometria**, propunham solução apenas com régua (sem escala) e compasso.

Anaxágoras

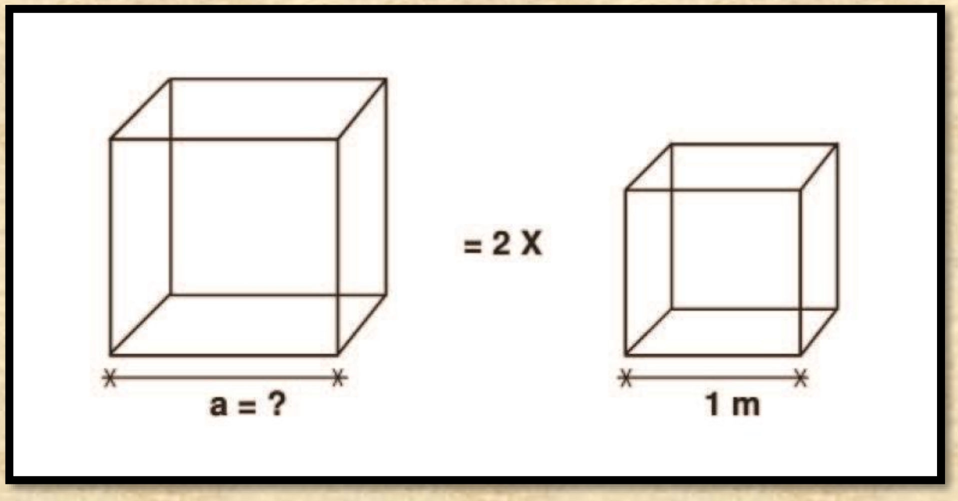
(Fonte Anaxágoras: https://cultura.culturamix.com/blog/wp-content/gallery/Anax%C3%A1goras-Fil%C3%B3sofo-Grego-1/Anax%C3%A1goras-Fil%C3%B3sofo-Grego-3.jpg)



Solução do quadrado do círculo

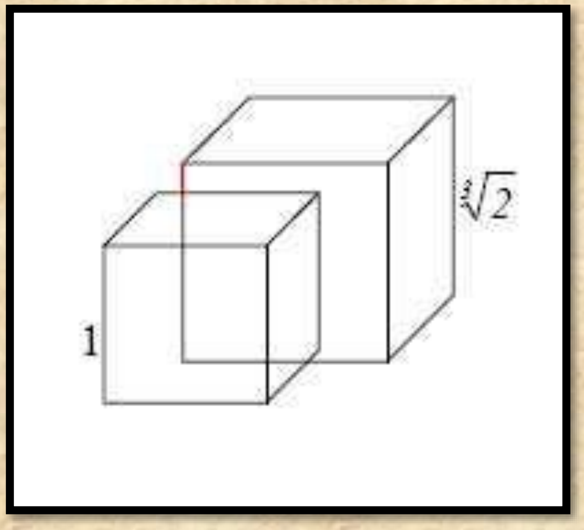
(Fonte: https://www.educacional.com.br/imagens/articulistas/artigo0055_img_01a.gif)

O segundo problema: A duplicação do cubo



Representação Gráfica do Problema da Duplicação do Cubo
(Fonte: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/8b/O_Problema_da_Duplica%C3%A7%C3%A3o_do_Cubo.jpg)

Conta uma lenda que, em 429 a.C., durante o cerco espartano na Guerra do Peloponeso, uma peste dizimou um quarto da população de Atenas, matando inclusive Péricles, e que uma plêiade de sábios fora enviada ao **oráculo de Apolo**, em Delfos, para inquirir como a peste poderia ser eliminada.

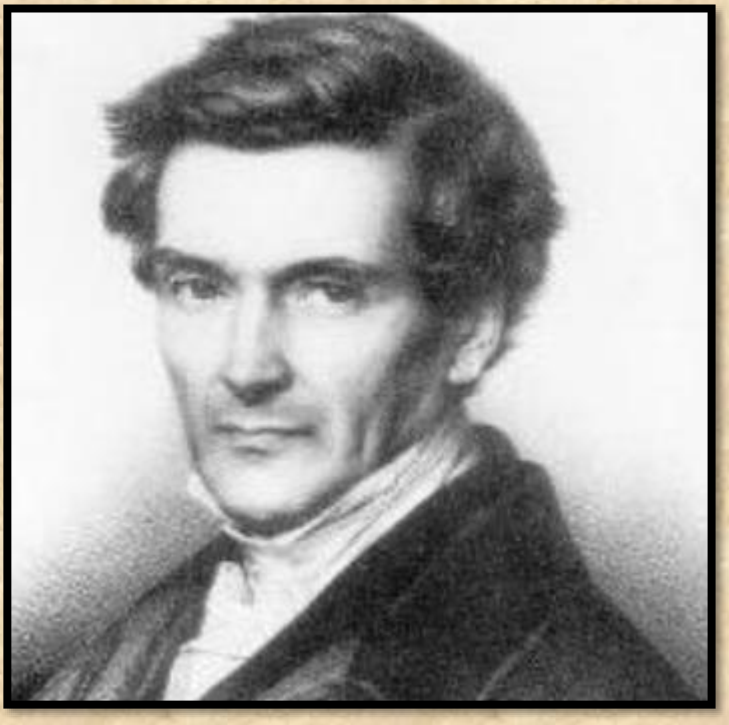


Duplicação do cubo
(Fonte: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/13/Dup_cubo.jpg)

O **oráculo** respondeu que o altar cúbico de Apolo deveria ser duplicado. Os atenienses celeremente dobraram as medidas das arestas. A peste, em vez de se amainar, recrudesceu. **Qual o erro?** Em vez de dobrar, os atenienses octuplicaram o volume do altar.

A complexidade do problema deve-se ao fato de que os gregos procuravam uma solução geométrica, usando régua (sem escala) e compasso.

Em 1837, **Pierre L. Wantzel**, um jovem professor e matemático francês de apenas 23 anos, demonstra que a quadratura do círculo e a duplicação do cubo não podem ser resolvidos utilizando-se apenas régua e compasso.



Pierre L. Wantzel

(Fonte: https://miro.medium.com/max/696/1-cTp_RWk5U5EKlAckpz9Bg.png)*

Assim sendo, para duplicar um quadrado de aresta ***a*** basta construir um quadrado de aresta $\boldsymbol{a\sqrt{2}}$. É então natural surgir a questão de transpor este problema para figuras sólidas como o cubo. Com os recursos da álgebra, vejamos por que isto não acontece:

Seja um segmento de reta de comprimento ***a*** . O volume de um cubo cuja aresta seja ***a*** é:

$$V_{Cubo\ de\ aresta\ a} = a^3 \quad (1)$$

Queremos obter um segmento de reta de comprimento ***b*** , cujo volume de um cubo de aresta *b* é:

$$V_{Cubo\ de\ aresta\ b} = b^3 \quad (2)$$

Como o objetivo do problema deliano é duplicar o volume do cubo de aresta ***a*** , então segue que:

$$V_{Cubo\ de\ aresta\ b} = 2V_{Cubo\ de\ aresta\ a} \quad (3)$$

Substituindo (1) e (2) em (3) teremos:

$$b^3 = 2a^3 \implies \frac{b}{a} = \sqrt[3]{2}$$

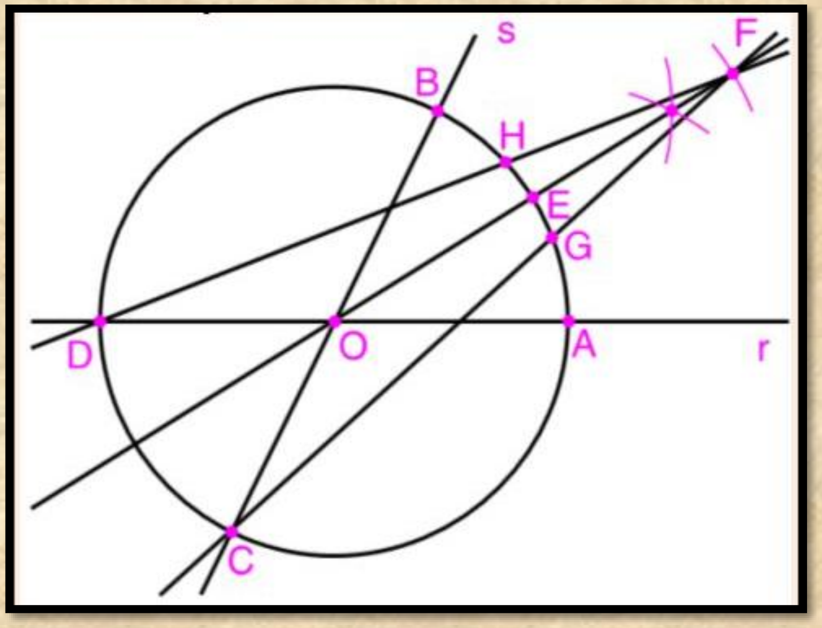
Assim, o problema se reduz a obter dois segmentos de reta cujos comprimentos estejam na proporção:

$$1 : \sqrt[3]{2}$$

O terceiro problema: A trissecção do ângulo

A **trissecção do ângulo** foi o terceiro dos problemas clássicos da antiguidade grega. Pretendia-se trissectar um ângulo, isto é, dividi-lo em três partes perfeitamente iguais usando apenas uma régua não graduada e um compasso.

Arquimedes propôs uma solução utilizando a espiral que leva seu nome.



Trissecção de ângulo

(Fonte:http:www.osfantasticvosnumerosprimos.com.br)

Axiomatização da geometria

Estátua de Euclides

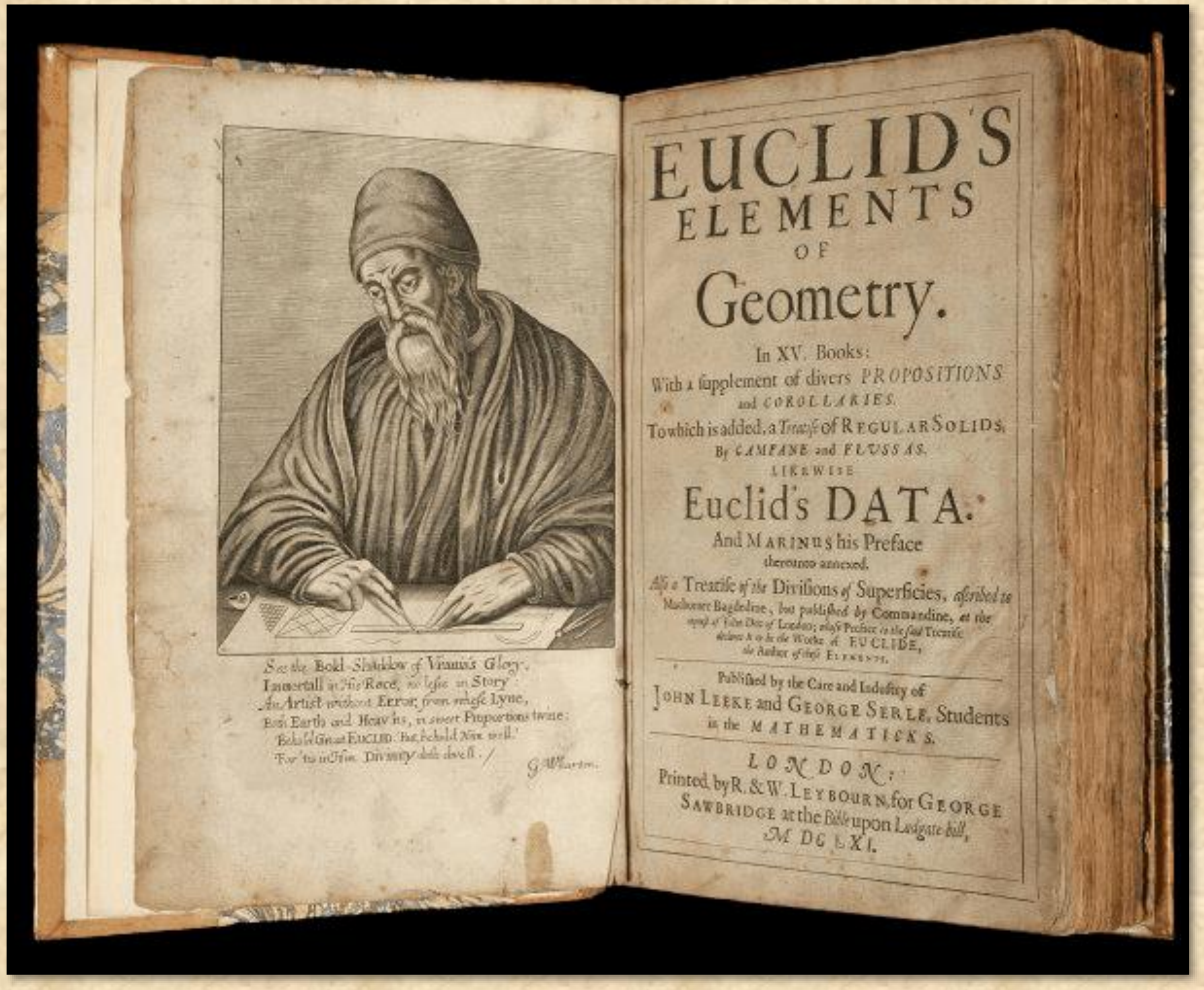
(Fonte: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/c/c4/EuclidStatueOxford.jpg/220px-EuclidStatueOxford.jpg)

Os gregos antigos desenvolveram uma estrutura de argumentação **axiomática** para a geometria que ficariam bastante populares na matemática europeia moderna.

Essa estrutura que parte de algumas definições, **axiomas** e **postulados** e, que a partir desses elementos devidamente pré-estabelecidos, poderiam se deduzir os **teoremas da geometria**.

Por volta do ano 300 a.C., **Euclides**, um matemático grego que vivia em Alexandria, escreveu um livro em 13 volumes intitulado ***Os Elementos de Geometria***, que expôs uma matemática de forma sistemática e estruturada, que reflete parte do conhecimento geométrico de diversos matemáticos gregos. ***Os Elementos***, além de geometria, também trata de aritmética.

É importante ressaltar que ***Os Elementos*** não refletem todas práticas matemáticas da Grécia Antiga. A limitação de utilizar somente régua e compasso é uma limitação que só se vê em ***Os Elementos*** e em alguns outros tratados geométricos desse período. Muitos assuntos matemáticos não foram contemplados nos elementos e muitos matemáticos não lidavam com a matemática a partir dele .



Livro de Euclides –Elementos de Geometria

(Fonte: https://sites.google.com/site/matematicainicio/_/rsrc/1493126862310/home/os-elementos/euclides-4%20%281%29.png)

Os gregos desenvolviam a matemática não com escopo prático, utilitarista, mas movidos pelo desafio intelectual, pelo "**sabor do saber**" e pelo prazer intrínseco, já que a matemática enseja o apanágio da lógica, da têmpera racional da mente e da coerência do pensamento. A prática dos debates e da argumentação era comum na vida pública do cidadão grego, portanto isso acaba se refletindo também na **geometria**.

Alguns influentes historiadores da matemática defendiam que nos ***Elementos*** havia teoremas de álgebra ou geometria algébrica, em especial nos livros 2 e 3. No entanto, é importante mencionar que as práticas algébricas são muito posteriores ao período dos gregos antigos.

Essa interpretação anacrônica não é mais defendida pelos historiadores de hoje.

Geometria analítica

René Descartes *Pierre de Fermat*

(Fonte Descartes: https://t5z6q4c2.rocketcdn.me/wp-content/uploads/2019/08/rene-descartes.jpg)
(Fonte Fermat: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/f/f3/Pierre_de_Fermat.jpg/200px-Pierre_de_Fermat.jpg)

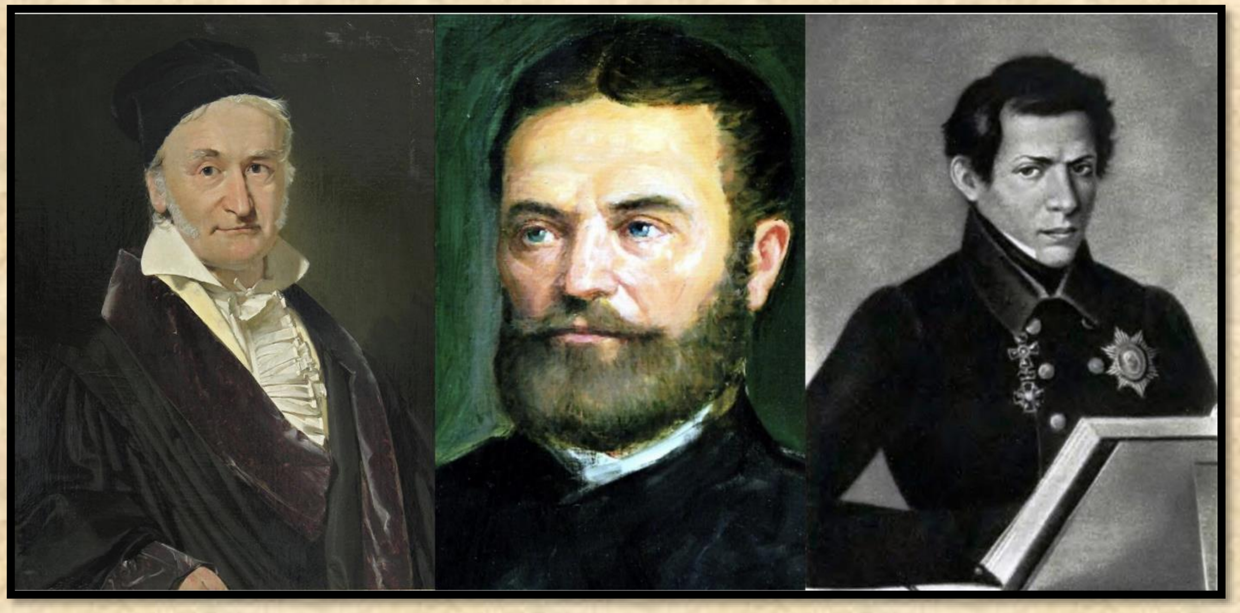
No século XVII, a criação da **geometria analítica** pelos matemáticos franceses **René Descartes** e **Pierre de Fermat** conectou a **álgebra** à **geometria** de forma bastante inovadora.

Até então a **geometria** possuía um papel de justificar os procedimentos **algébricos**.

A **álgebra** não era vista como uma disciplina, mas como uma extensão da **geometria**. No entanto, a partir do século XVII, essa hierarquia implícita da superioridade da **geometria** sobre a **álgebra** é rompida – ainda que não totalmente até ao século XIX.

A **álgebra** passa a ser utilizada para obter novos resultados geométricos e generalizar outros resultados já conhecidos. As práticas analíticas se tornaram importantes para o desenvolvimento do cálculo infinitesimal.

Geometrias não euclidianas



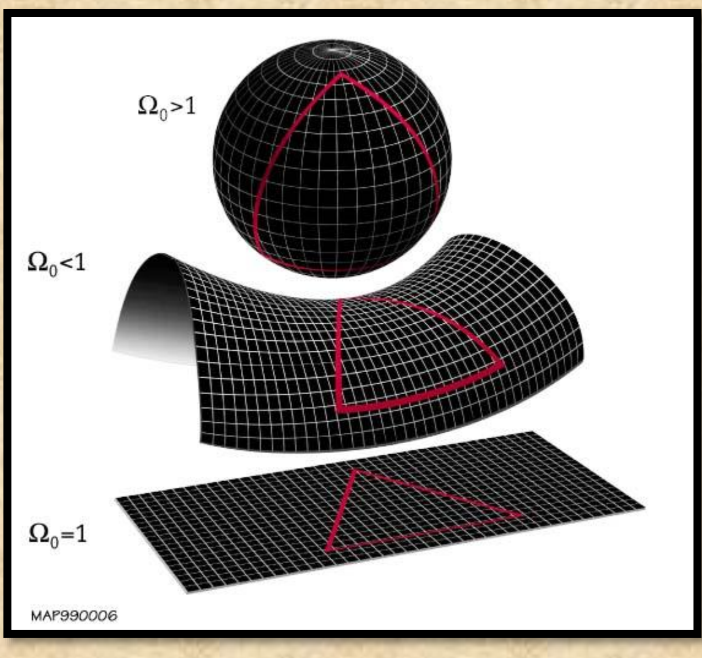
Carl Gauss *János Boltai* *Nikolai Lobachevsky*
*(Fonte:https://miro.medium.com/max/1400/1*pbhf1z5ng1ujheifxW-ULg.png)*

> "A suposição de que (em um triângulo) a soma dos três ângulos é menor que 180° leva a uma curiosa geometria, muito diferente da nossa, mas completamente consistente, que desenvolvi para a minha inteira satisfação." — Carl Gauss

Houve muita controvérsia em torno das **geometrias não euclidianas**. Por vezes, os teoremas em geometria não euclidiana eram tão exóticos que, apesar de não encontrarem inconsistências lógicas, matemáticos a tomavam como absurda.

Na matemática, uma **geometria não euclidiana** é uma geometria baseada num sistema axiomático distinto da geometria euclidiana. Modificando o axioma das paralelas, que postula que por um ponto exterior a uma reta passa exatamente uma reta paralela à inicial, obtêm-se as geometrias elíptica e hiperbólica (geometria de Lobachevsky). Na **geometria elíptica** não há nenhuma reta paralela à inicial, enquanto na **geometria hiperbólica** existe uma infinidade de retas paralelas à inicial que passam no mesmo ponto. Na **geometria elíptica** a soma dos ângulos internos de um triangulo é maior que dois ângulos retos, enquanto na

geometria hiperbólica esta soma é menor que dois ângulos retos. Na elíptica, temos que a circunferência de um círculo é menor do que π vezes o seu diâmetro, enquanto na hiperbólica esta circunferência é maior que π vezes o diâmetro.



Um triângulo nas geometrias elíptica, hiperbólica e euclidiana
(Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Geometria_n%C3%A3o_euclidiana)

O crédito pela descoberta das **geometrias não euclidianas** geralmente é atrelado às figuras dos matemáticos **Carl Friedrich Gauss**, e **Bernhard Riemann**.

Bernhard Riemann
(Fonte: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/8/82/Georg_Friedrich_Bernhard_Riemann.jpeg/640px-Georg_Friedrich_Bernhard_Riemann.jpeg)

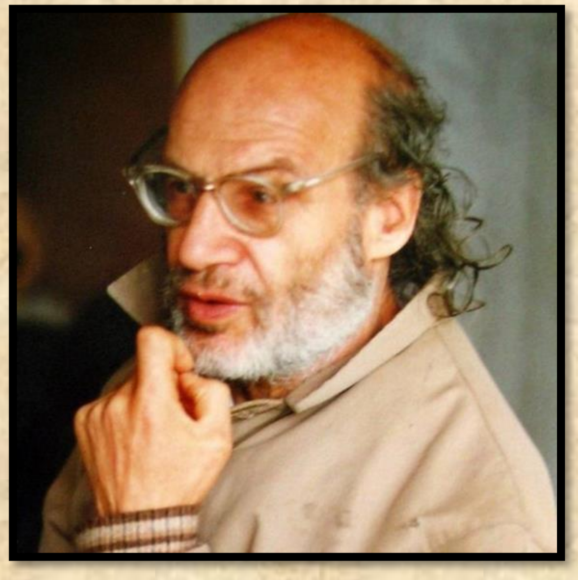
Programa de Erlangen

Felix Klein
(Fonte: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/97/Felix_Christian_Klein.jpg)

> "Dado qualquer grupo de transformações no espaço que inclui o grupo principal como um subgrupo, então a teoria invariante para esse grupo fornece um tipo definido de **geometria,** e todas as **geometrias** possíveis podem ser obtidas dessa mesma maneira." — Felix Klein

Em 1871, enquanto em Gotinga, **Felix Klein** fez descobertas importantes em **geometria**. Klein fez uso da teoria dos invariantes para unir a **geometria** à teoria dos grupos. Ele publicou dois artigos sobre a chamada **geometria não euclidiana**, mostrando que as **geometrias euclidiana e não euclidianas** podiam ser consideradas casos especiais de uma superfície projetiva com uma seção cônica específica adjunta. Isso teve o corolário notável de que a **geometria não euclidiana** era consistente se, e somente se, a **geometria euclidiana** o fosse, colocando as geometrias euclidiana e não euclidianas em pé de igualdade (uma vez que se fosse encontrada uma inconsistência em qualquer uma delas, isto acarretaria que a outra também é inconsistente), e terminando com toda a controvérsia que girava em torno das **geometrias não euclidianas**.

Os trabalhos de Grothendieck



Alexander Grothendieck
(Fonte: https://img.estadao.com.br/fotos/crop/1200x1200/resources/jpg/9/3/1558996133839.jpg)

No século XX, o matemático **Alexander Grothendieck** usou teoria das categorias e topologia para generalizar a **geometria algébrica**, o que lhe permitiu aplicar ferramentas de geometria e topologia à teoria dos números. Essa união é conhecida pelo nome de **geometria aritmética**.

Os trabalhos de Mandelbrot

Benoît Mandelbrot
(Fonte: https://pesquisa.ufabc.edu.br/4db/wp-content/uploads/2017/12/Benoit-Mandelbrot.jpg)

Na década de 1960, **Benoît Mandelbrot** começou a escrever sobre autossimilaridade em artigos tais como "Quão Longa é a Costa da Grã-Bretanha? Autossimilaridade Estatística e Dimensão Fracionária", e em 1975, ele cunhou o termo **fractal**, e contribuiu para estimular o campo agora conhecido por **geometria fractal**.

Ramos

Geometria clássica

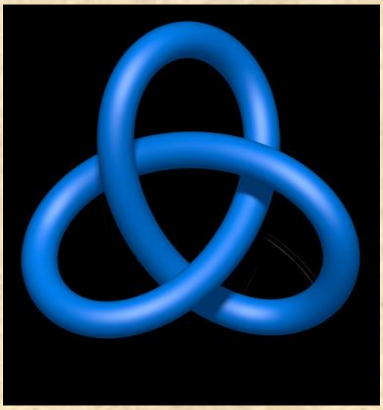
Henri Poincaré

(Fonte: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/f/f4/PSM_V82_D416_Henri_Poincare.png/640px-PSM_V82_D416_Henri_Poincare.png)

De acordo com **Henri Poincaré**, um espaço **geométrico clássico** caracteriza-se por possuir as propriedades de ser:

1. Contínuo
2. Infinito
3. Tridimensional
4. Homogêneo (isto é, com as mesmas propriedades em toda parte)
5. Isotrópico (isto é, sem direção privilegiada).

Topologia e geometria



O nó de trevo

(Fonte: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/b/b3/Blue_Trefoil_Knot.png/1200px-Blue_Trefoil_Knot.png)

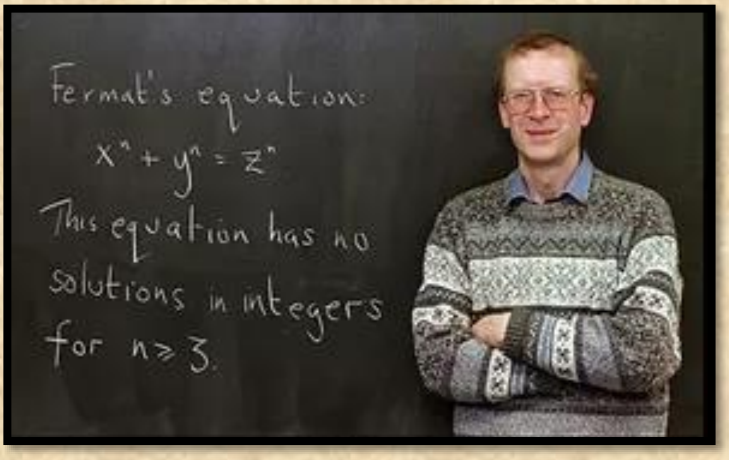
O campo da topologia, em que houve enorme desenvolvimento no século XX, é em sentido técnico um tipo de **geometria transformacional**, em que as transformações que preservam as propriedades das figuras são os **homeomorfismos** (por exemplo, isto difere da geometria métrica, em que as transformações que não alteram as propriedades das figuras são as isometrias). Isto tem sido frequentemente expresso sob a forma do dito "a topologia é a geometria da folha de borracha".

Geometria diferencial

A **geometria diferencial** é a disciplina matemática que faz uso de técnicas de cálculo diferencial e cálculo integral, bem como de álgebra linear e álgebra multilinear, para estudar problemas de **geometria**. Ela é de vital importância no estudo de física teórica.

Geometria algébrica

A **geometria algébrica** é o ramo da matemática que iniciou como o estudo de sistemas de equações polinomiais em dimensões maiores que 3 e que evoluiu da **geometria analítica** para uma união de álgebra abstrata, topologia e análise complexa. A demonstração de **Andrew Wiles** do último **teorema de Fermat**, um problema de teoria dos números, usou muitas ideias de geometria algébrica descobertas e desenvolvidas a partir do século XX.



Andrew Wiles
(Fonte: http://s2.glbimg.com/QNrhfILvYXk_rdYx6RYyKbHCxJ8=/290x177/s2.glbimg.com/IShw4W-zbikyB-yJcfIJAa6pQU4=/s.glbimg.com/jo/g1/f/original/2016/03/15/wiles_p.jpg)

Geometria euclidiana

A **geometria euclidiana** é a geometria em seu sentido clássico. O currículo educacional obrigatório da maioria das nações inclui o estudo de pontos, linhas, planos, ângulos, triângulos, congruência, semelhança, figuras sólidas, círculos e geometria analítica. A **geometria euclidiana** também possui aplicações em ciência da computação, cristalografia e vários ramos da matemática moderna.

Aplicações

Concha de um náutilos: O formato é aproximadamente uma espiral logarítmica
(Fonte: https://1.bp.blogspot.com/-_NCEUD1nErs/Xkm3db8bnGI/AAAAAAAAtDk/r8A6lRUNiEYpt0XM2FWFSWdcWBDs8FTCgCLcBGAsYHQ/s1600/Nautilus-concha.jpg)

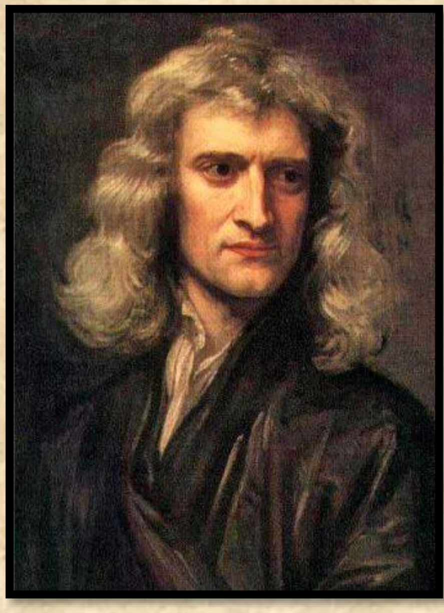
A **geometria** surgiu da necessidade de resolver problemas práticos de agricultura, astronomia, arquitetura e engenharia, e de fato, ainda hoje conhecimentos de **geometria** são aplicados nos mais variados campos do conhecimento humano, tais como: física, química, geologia, astronomia, engenharia, biologia, navegação, cartografia e fotografia.

No entanto, cabe ressaltar que a **geometria** é considerada parte da matemática pura, por, embora tenha começado como uma ciência prática e encontre aplicações em muitos ramos fora da matemática, ela é comumente desenvolvida abstraída da realidade, como uma teoria matemática pela qual matemáticos estudam motivados por seu apelo intrínseco.

Física

Das observações astronômicas de **Johannes Kepler** (mais tarde explicadas pelos trabalhos de **Isaac Newton**) foi descoberto que os planetas seguem órbitas elípticas com o Sol em um dos focos.

Johannes Kepler



Isaac Newton

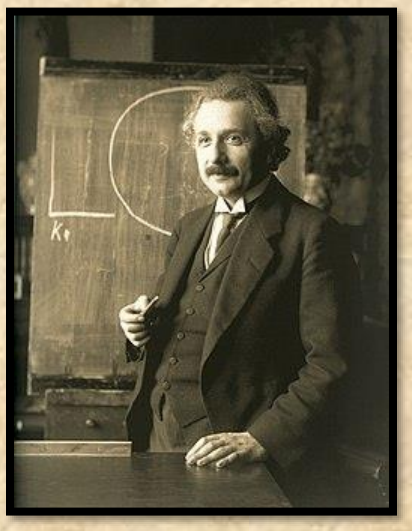
(Fonte Kepler: https://s2.glbimg.com/p17w3iCILumj0e3Ow4z2PCochr4=/e.glbimg.com/og/ed/f/original/2020/01/20/johannes_kepler_1610.jpg)
(Fonte Newton: https://www.infoescola.com/wp-content/uploads/2008/09/isaac-newton-328x450.jpg)

As seções cônicas, estudadas pelos gregos antigos encontraram aplicações em mecânica celeste, 1800 anos depois de serem por eles descobertas. A linguagem da trigonometria euclidiana é amplamente utilizada no estudo da óptica, em que o conceito de raios de luz pode ser usado para tratar de diversos fenômenos ópticos, como por exemplo, a difração da luz.

Apesar de estudiosos tais como **Carl Gauss** e **Nikolai Lobachevsky** terem considerado a possibilidade de o espaço físico não ser euclidiano, as **geometrias não euclidianas** eram quase que apenas consideradas curiosidades intelectuais abstratas antes de **Albert Einstein** encontrar usos para elas em teorias de física. Na teoria geral da relatividade, interpreta-se que o espaço torna-se **"curvo"** na presença de campos gravitacionais.

Carl Gauss

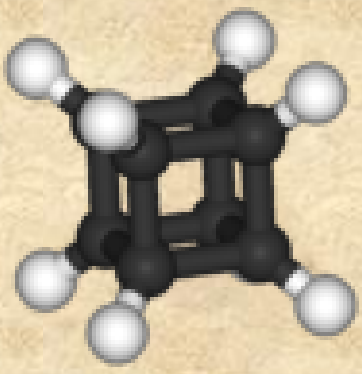
Nikolai Lobachevsky



Albert Einstein

(Fonte Gauss: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/9b/Carl_Friedrich_Gauss.jpg)
(Fonte Nikolai: https://todayinsci.com/L/Lobachevsky_Nikolay/LobachevskyNikolay300px.jpg)
(Fonte Einstein: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/3/3e/Einstein_1921_by_F_Schmutzer_-_restoration.jpg/250px-Einstein_1921_by_F_Schmutzer_-_restoration.jpg)

Química



Molécula cubana do modelo bola e vareta
(Fonte: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/1/18/Cubane-3D-balls.png/200px-Cubane-3D-balls.png)

A **geometria de uma molécula** (como os átomos que formam uma molécula estão dispostos espacialmente) determina muitas das propriedades químicas e físicas de uma substância. Apesar disso, poucos trabalhos que investigam as relações entre a **geometria** e **química** foram realizados por matemáticos:

"É perfeitamente compreensível o fato de os **cristalógrafos** estarem interessados pelos grupos de simetria de cristais e por outras estruturas tridimensionais, mas é difícil explicar por que este tema tem sido amplamente ignorado pelos matemáticos. Talvez seja uma questão de atitude; os matemáticos há muito tempo consideram como humilhante trabalhar em problemas relacionados com a **'geometria elementar'** em duas ou três dimensões, apesar do fato de que é precisamente esse tipo de matemática que é de valor prático." — Branko Grünbaum e G. C. Shephard, em *Handbook of applicable mathematics* - Volume 5, Parte 2, Página 728.

Cartografia

Projeção cartográfica da superfície terrestre

(Fonte: https://guiadoestudante.abril.com.br/wp-content/uploads/sites/4/2016/10/mapa2.jpg?quality=100&strip=info&w=400)

Projeções cartográficas são transformações que mapeiam pontos de uma superfície não plana (geralmente, por simplicidade, assume-se a forma de uma esfera ou elipsoide como o formato do planeta) para os pontos de um plano. É impossível representar a superfície da Terra em um plano sem que ocorram distorções (uma consequência do Teorema Egrégio de Gauss).

Engenharia

A **geometria fractal** é aplicada nos projetos de antenas fractais usadas em comunicação sem fio multi-banda compacta — a propriedade de preenchimento do espaço dos fractais é explorada de modo a conseguir-se miniaturizações cada vez mais expressivas.

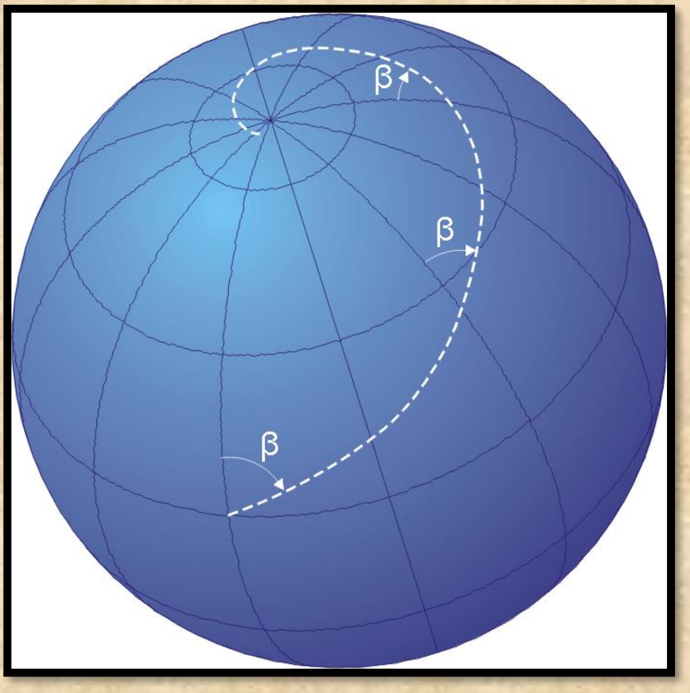
Conhecimentos a respeito de fractais encontram aplicações também no entendimento da porosidade do solo, atrito entre objetos, e em engenharia aeronáutica.

Biologia

Uma colmeia
(Fonte: https://ironiandrade.com.br/wp-content/uploads/2020/02/matthew-t-rader-ohygdzgWbr4-unsplash.jpg)

Já na Antiguidade estudiosos perceberam **padrões geométricos** na natureza. Papo de Alexandria viveu no século III e escreveu: "As abelhas foram dotadas de uma certa premeditação **geométrica** .... Pois, havendo apenas três figuras que por elas mesmas pode-se preencher o espaço em volta de um ponto, viz. o triângulo, o quadrado e o hexágono, as abelhas sabiamente escolhem para a sua estrutura aquela que contém o maior número de ângulos, suspeitando de fato que ela pode conter mais mel do que qualquer uma das outras duas."

Navegação

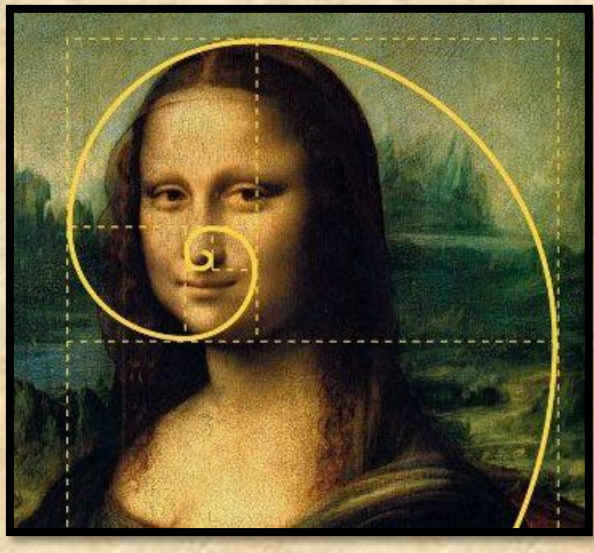


Curva loxodrômica na esfera

(Fonte: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d6/Loxodrome.png)

A obra do matemático português **Pedro Nunes**, que viveu no século XVI, voltou-se para o desenvolvimento da teoria náutica e resolução dos problemas que se apresentavam no período das **Grandes Navegações Portuguesas**, tendo resolvido problemas tais como o de determinar em que longitude se está quando em alto mar, e lançado luz sobre o tema das linhas de rumo (curvas loxodrômicas), extremamente úteis para não se perder a rota quando se navega em alto mar (e, portanto, sem referências costeiras).

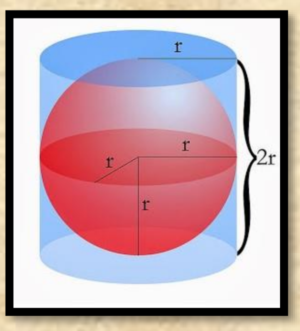
Mais exemplos



A proporção áurea aplicada na arte
(Fonte: https://musichess.com/wp-content/uploads/2018/06/da-vinci-aurea-e1530029515505.jpg)

O empacotamento de esferas aplica-se a uma pilha de laranjas
(Fonte: https://cdn.xxl.thumbs.canstockphoto.com.br/laranja-fresco-mercado-frutas-banco-de-imagem_csp17281669.jpg)

Relações entre a geometria e outros ramos do conhecimento



Esfera em um cilindro circunscrito
(Fonte: https://files.cursoenemgratuito.com.br/uploads/2020/11/Cilindro-circunscrito-a-esfera-inscricao-e-circunscricao.jpg)

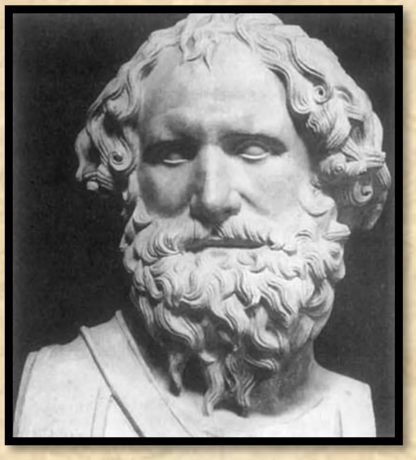
Como mostrado por Arquimedes, uma esfera tem 2/3 do volume de seu cilindro circunscrito

A **matemática** é tradicionalmente dividida em três grandes áreas, sendo a **geometria** uma delas, e a **álgebra** e a **analítica** as outras duas — que por sua vez se dividem em diversas outras subáreas (que frequentemente intersectam-se).

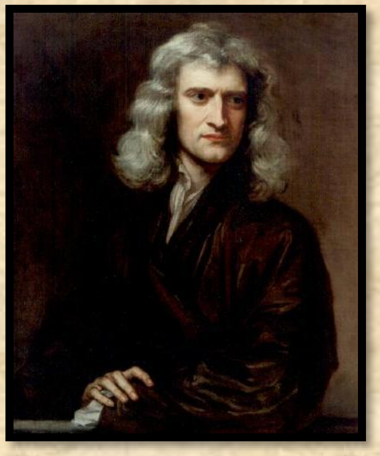
Essas três grandes áreas são também conhecidas como delineadoras de ***maneiras de pensar*** em matemática, e os matemáticos são por vezes classificados em **algebristas**, **geômetras** e **analistas**.

Exemplos de matemáticos considerados geômetras são: **Arquimedes**, **Isaac Newton**, **Bernhard Riemann**, **Henri Poincaré**, **Felix Klein**, **Michael Atiyah**, **Vladimir Arnold**, e **Mikhail Gromov**.

Frequentemente a solução para um mesmo problema pode ser encontrada "geometricamente", "algebricamente" ou "analiticamente", e a decisão sobre qual é a melhor, a mais simples, ou a mais adequada solução, frequentemente depende de preferências pessoais bastante subjetivas.



Arquimedes



Isaac Newton

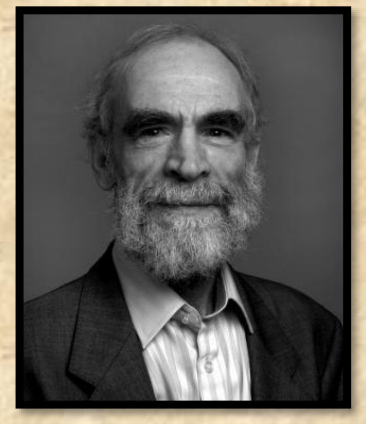
Bernhard Riemann

(Fonte Arquimedes: https://i.em.com.br/ia61AapxPNThDh24n8uhMNu9kEY=/675x/smart/imgsapp.em.com.br/app/noticia_127983242361/2015/04/13/637166/20150413184610743119o.jpeg)
(Fonte Newton: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/83/Sir_Isaac_Newton_%281643-1727%29.jpg)
(Fonte Bernhard: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/82/Georg_Friedrich_Bernhard_Riemann.jpeg)

Henri Poincaré Felix Klein Michael Atiyah

(Fonte Henri: https://www.infoescola.com/wp-content/uploads/2020/05/Henri_Poincare.jpg)
(Fonte Felix: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/97/Felix_Christian_Klein.jpg)
(Fonte Michael: https://media.nature.com/lw800/magazine-assets/d41586-019-00358-9/d41586-019-00358-9_16419598.jpg)

Vladimir Arnold Mikhail Gromov

(Fonte Vladimir: https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcQA6StfalfCrl_34xfU0CoiD0x LLp9CbJ031EVon7z9RebD4pbESx7D-Q4C-rf8qxWkrKE&usqp=CAU)
(Fonte Mikhail: https://abelprize.no/sites/default/files/styles/gutenberg_style_rect_front/public/2021-04/2009_Gromov_A.L.Flavik.jpg?itok=AOZsGtcz)

Como exemplo, o proeminente matemático russo **Vladimir Rokhlin** certa vez afirmou bastante emocionado que "a profundidade e a beleza da **geometria** não podem ser comparadas com as de qualquer outra área da matemática".

Vladimir Rokhlin

(Fonte: https://www.amacad.org/sites/default/files/images/headshots/headshot_81694.jpg)

Já foram escritos muitos ensaios sobre ***pensar geometricamente*** e utilizar ***intuição geométrica e visualização*** como poderosos meios de avançar em áreas da matemática, bem como outros com a tese oposta, um fenômeno que frequentemente é descrito como delineador entre as várias *escolas de pensamento* em matemática, cada qual com prioridades e maneiras de pensar que podem ser eventualmente bastante conflitantes.

Como exemplos, de forma simplificada, mas essencialmente correta: na **geometria analítica** majoritariamente usa-se **álgebra** para resolver problemas de **geometria**, já na **álgebra geométrica** faz-se o inverso, interpretando-se entes algébricos geometricamente – interpretações geométricas que, por exemplo, podem ser utilizadas para visualizar-se identidades algébricas.

As distintas maneiras de se pensar sobre um mesmo tema frequentemente revelam-se nos nomes de alguns dos atuais campo de pesquisa em matemática: **topologia algébrica**, **topologia geométrica** e **topologia diferencial**, bem como teoria dos grupos e teoria geométrica de grupos, e também existem abordagens com apelos mais geométricos, algébricos ou analíticos, em diferentes proporções, em campos que vão de equações diferenciais a sistemas dinâmicos, e muitos outros.

Geometria e análise

A **análise** é uma ferramenta imprescindível para o estudo aprofundado da **geometria**. Como exemplo, todos os conceitos básicos em **geometria diferencial** são definidos por conceitos que pertencem à **análise**. E o estudo de **geometria** leva, de maneira natural, a muitos conceitos da análise, tais como os diferentes tipos de derivadas, ao conceito de variedades, e vários outros.

Historicamente, foram utilizados muitos artifícios heurísticos na resolução de problemas **geométricos** cujas justificativas rigorosas pertencem à **análise**. Também alguns teoremas básicos da **geometria** necessitam de conceitos da **análise** para suas demonstrações rigorosas — exemplos disso são o teorema de Tales (que requer a continuidade da reta) e o princípio de Cavalieri (que requer a teoria das integrais por meio de limites).

Simetria como ponte entre diversas áreas

Lilium bulbiferum

(Fonte: https://thumbs.dreamstime.com/b/abra-lily-flower-isolated-alaranjada-no-fundo-preto-31745134.jpg)

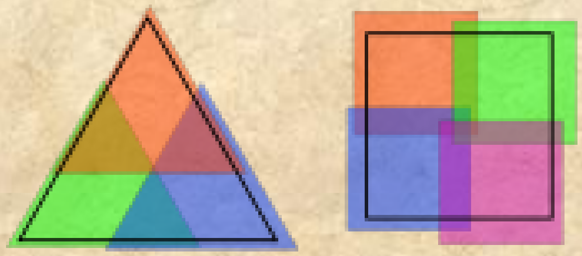
A ideia de **simetria** teve origem no estudo de **geometria**, e ao longo de sua história, a humanidade foi percebendo a presença de **simetrias** nas formas presentes na natureza: o sol, as folhas, as flores, os corpos dos humanos e de outros animais, os cristais de gelo, a neve, entre tantos outros exemplos de objetos com formas simétricas.

À medida que eram acumuladas mais observações (sabe-se que a **simetria dos cristais de gelo** já era bem conhecida na China no século X), cada vez mais a questão de como a **simetria** surgia na natureza intrigava os estudiosos. Ao longo da evolução da matemática, a noção de simetria se tornou uma das mais importantes noções, não apenas em **geometria**, mas em todas as áreas da matemática, e também na física — onde o entendimento de simetrias das leis da física fornece meios extremamente eficazes para a compreensão dos fenômenos regidos por tais leis.

Os "**argumentos de simetria**" frequentemente fornecem atalhos e soluções elegantes para problemas matemáticos e físicos. Mas as ideias de **simetria** são influentes não apenas por fornecerem métodos para a resolução de problemas: o seu aspecto mais importante é que elas são peças-chaves em muitas das ligações entre os diferentes ramos das ciências.

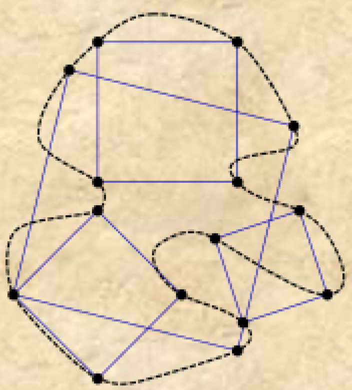
Problemas em aberto

Existem muitos problemas em aberto em **geometria**. Alguns dos quais podem ser entendidos por leigos, por exemplo:



Um triângulo pode ser coberto por três cópias menores de si mesmo, mas um quadrado exige quatro cópias menores.

Conjectura de Hadwiger: Toda figura convexa n-dimensional pode ser completamente coberta por 2^n cópias menores dela mesma? (em aberto desde 1955).



Todos os vértices de alguns quadrados fazem parte da curva.

Conjectura de Toeplitz: Toda curva plana simples fechada contém os quatro vértices de um quadrado? (em aberto desde 1911).

Conjectura de Erdős–Szekeres: Para n ≥ 3, qualquer conjunto de 2^{n-2} + 1 pontos no plano, em posição geral (disso exclui-se estarem todos alinhados por exemplo), contém n pontos que formam um polígono convexo? (em aberto desde 1935).

Referências

Abers, E.S.; Kennel, C.F. - Matter in motion: *The spirit and evolution of physics*, 261 p.

Ball, F. (2001). Life's Matrix: *A Biography of Water*. [S.l.]: University of California Press. 190 p. ISBN 978-0-520-23008-8

Chang, R. (1975). *Química Geral*. [S.l.]: McGraw Hill Brasil. 300 p. ISBN 978-85-63308-17-7

Chern, Shiing-Shen, Chen, W., Lam, K.S. *Lectures on Differential Geometry*, 335 p.

Gibilisco, S. (1983). *Understanding Einstein's Theories of Relativity. Man's New Perspective on the Cosmos*. [S.l.]: Courier Dover Publications. 153 p. ISBN 9780486266596

Gowers, T.; Barrow-Green, J.; Leader, I. eds. (18 de julho de 2010). *The Princeton Companion to Mathematics*. [S.l.]: Princeton University Press. 3 p. ISBN 1-4008-3039-7

Gowers, T.G.; Barrow-Green, J.: Leade, I. (2010). *The Princeton Companion to Mathematics*. [S.l.]: Princeton University Press. 91 p. ISBN 9781400830398

Gruber, B.; Marmo, G.; Yoshinaga, N. (27 de dezembro de 2005). *Symmetries in Science XI.* [S.l.]: Springer Science & Business Media. 226 p. - ISBN 978-1-4020-2634-8

Lauer, H.; Anyidoho, K. (2012). *Reclaiming the Human Sciences and Humanities Through African Perspectives.* 1. [S.l.]: African Books Collective. 153 p. ISBN 9789988647339

Lucas, J.R. (2002). *Conceptual Roots of Mathematics*. [S.l.]: Routledge. 39 p. ISBN 9781134622276

Martin J.T., Blackledge, J.M., Andrews, P.R. (1998). *"Fractal geometry in digital imaging"*. Academic Press. p.1. ISBN 0-12-703970-8

Maslov A.V.; Gordeev A.V.; Batrakov, I.G. (1984). *Geodetic surveying*. [S.l.]: Mir Publishers. 25 p.

Morris, R. - *Geometry in Schools*, 173 p.

Pantoja, L.; Peres, C.; Sá, P. *Recreações Topológicas*. 4 p.

Pedoe, D. *"Thinking Geometrically", American Mathematical Monthly*, Vol. 77, No. 7. (Aug.–Sep., 1970), p. 711–721.

Poincaré, H. (1902). *La Science et l'Hypothèse*. [S.l.]: Champs Flammarion

Prenowitz, W.; Meyer, J. (1989). *Basic Concepts of Geometry*. [S.l.]: Rowman & Littlefield. 91 p. ISBN 9780912675480

Satz, H. (4 de fevereiro de 2014). *Ultimate Horizons: Probing the Limits of the Universe.* [S.l.]: Springer Science & Business Media. 128 p. ISBN 978-3-642-41657-6

Schmidt, W.; Houang, R.; Cogan, L. (2002). *A coherent curriculum*. [S.l.]: American educator. p. 1–18

Schutz, B.F. (28 de janeiro de 1980). *Geometrical Methods of Mathematical Physics*. [S.l.]: Cambridge University Press. 2 p. ISBN 978-1-107-26814-2

Shalaev, V.M. (22 de janeiro de 2002). *Optical Properties of Nanostructured Random Media*. [S.l.]: Springer Science & Business Media. 5 p. –. ISBN 978-3-540-42031-6

Simon, P.L. – *Differential Equations and Dynamical Systems*. Arquivado em 18 de novembro de 2015, no Wayback Machine.

Venturi, J.J. *Problema da duplicação do cubo ou problema deliano*. Álgebra Vetorial e Geometria Analítica 9 ed. [S.l.: s.n.] 23 p.

Weisstein, E.W. - *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*, Second Edition, 48 p.