MUSEU DE TOPOGRAFIA PROF. LAUREANO IBRAHIM CHAFFE
DEPARTAMENTO DE GEODÉSIA – UFRGS

O NÚMERO PI

Original em espanhol:
http://es.wikipedia.org/wiki/Numero_pi

Tradução, ampliação e ilustrações:
Iran Carlos Stalliviere Corrêa – Museu de Topografia Prof. Laureano Ibrahim Chaffe, Departamento de Geodésia, IG/UFRGS.

Outubro/2009

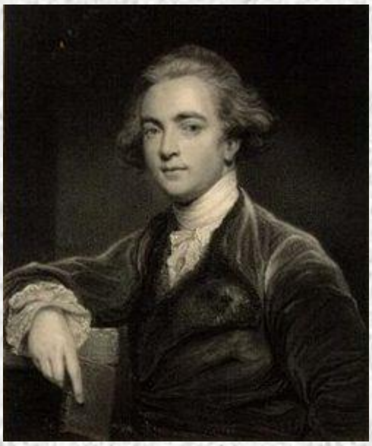
O π (pi) é a relação entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro, na Geometria euclidiana. É um número irracional e é uma das constantes matemáticas mais importante. É empregado frequentemente na matemática, física e engenharia. O valor numérico de π, truncado em suas primeiras cifras, é o seguinte:

$$\pi \approx 3{,}14159265358979323846\ldots$$

O valor de π foi obtido com diversas aproximações ao longo da história, sendo uma das constantes matemáticas que mais aparece nas equações da física, junto com o número ***e***. Por isso, talvez seja a constante que mais paixões desperta entre os matemáticos profissionais e aficionados. A relação entre a circunferência e seu diâmetro não é constante nas geometrias não euclidianas.

O nome π

A notação com a letra grega π provém da inicial das palavras de origem grega "***π***εριφέρεια" (*periferia*) e "***π***ερίμετρον" (*perímetro*) de um círculo. Esta notação foi usada pela primeira vez em 1706 pelo matemático William Jones e popularizada pelo matemático Leonhard Euler, em sua obra «*Introdução ao cálculo infinitesimal*» de 1748. Foi conhecida anteriormente como a *constante de Ludolph* (em honra ao matemático Ludolph van Ceulen) ou como *constante de Arquimedes* (não confundir com o *número de Arquimedes*).



Willian Jones (1746-1794)   Ludolph van Ceulen (1540-1610)

História do cálculo do valor de π

A busca do maior número de decimais do valor de π tem exigido um esforço constante de numerosos cientistas ao longo da história. Algumas aproximações históricas do valor de π são as seguintes:

Antigo Egito

Detalhe do papiro Rhind.

O valor aproximado de π nas antigas culturas, remonta a época do escriba egípcio Ahmes no ano de 1800 a.C., descrito no papiro Rhind, onde se emprega um valor aproximado de π afirmando que: a área de um círculo é similar a área de um quadrado, cujo lado é igual ao diâmetro do círculo diminuído em 1/9, isto é, igual a 8/9 do diâmetro.

Em anotação moderna:

$$S = \pi r^2 \cong \left(\frac{8}{9}d\right)^2 = \frac{64}{81}d^2 = \frac{64}{81}\left(4r^2\right)$$

$$\pi \cong \frac{256}{81} = 3{,}16049.....$$

Entre os oito documentos matemáticos achados na antiga cultura egípcia, em dois se fala de círculos. Um é o papiro Rhind e o outro é o papiro de Moscou. Somente no primeiro se fala do valor aproximado do número π. O pesquisador Otto Neugebauer, em um anexo de seu livro "*The Exact Sciences in Antiquity*", descreve um método inspirado nos problemas do papiro de Ahmes, para averiguar o valor de π, mediante a aproximação da área de um quadrado de lado 8, a de um círculo de diâmetro 9.

Otto Neugebauer (1899-1990)

Mesopotamia

Alguns matemáticos mesopotâmicos empregavam, no cálculo de segmentos, valores de π igual a 3, alcançando, em alguns casos, valores mais aproximados, como o de 3 + 1/8.

Referências bíblicas

Uma das referências indiretas mais antigas do valor aproximado de π se pode encontrar em um versículo da Bíblia:

<Fez fundir assim mesmo um mar de dez braças de um lado ao outro, perfeitamente redondo. Tinha cinco braças de altura e ao seu redor um cordão de trinta braças> I Reis 7:23

Uma citação similar pode ser encontrada em II Crônicas 4:2. Nela aparece em uma lista de requerimentos para a construção do Grande Templo de Salomão, construído em 950 a.C. Ambas as citações dão 3 como o valor de π, o que supões uma notável perda de precisão em relação às estimações anteriores dos egípcios e mesopotâmicos.

Antiguidade clássica

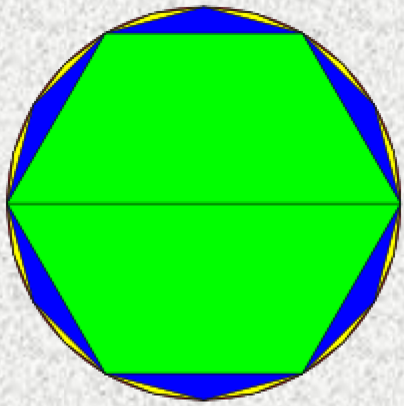
O matemático grego Arquimedes (século III a.C.) foi capaz de determinar o valor de π, entre o intervalo compreendido por $3\frac{10}{71}$, como valor mínimo, e $3\frac{1}{7}$, como valor máximo. Com esta aproximação de Arquimedes se obtém um valor para π com um erro que oscila entre 0,024% e 0,040% sobre o valor real. O método usado por Arquimedes era muito simples e consistia em circunscrever e inscrever polígonos regulares de n-lados em circunferências e calcular o perímetro de ditos polígonos. Arquimedes iniciou com hexágonos circunscritos e inscritos, e foi dobrando o número de lados até chegar a polígonos de 96 lados.

Arquimedes (287 a 212 a.C.)

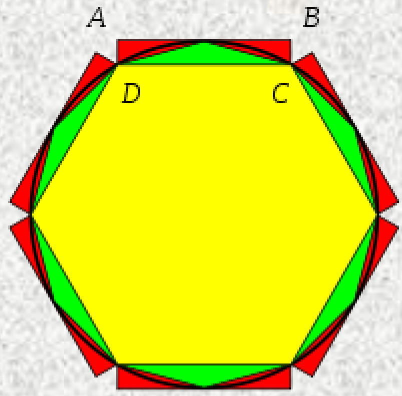
Em torno do ano 20 d.C., o arquiteto e engenheiro romano Vitrúvio calculou π como sendo o valor fracionário $\frac{25}{8}$ medindo a distância percorrida em uma revolução, por uma roda de diâmetro conhecido.

No século II, Claudio Ptolomeu proporciona um valor fracionário por aproximações:

$$\pi \cong \frac{377}{120} = 3{,}1416.....$$



Método de Arquimedes para encontrar dois valores que se aproximem ao número π, por excesso e falta.



Método de aproximação de Liu Hui.

Matemática chinesa

O cálculo de π foi uma atração para os matemáticos de todas as culturas. Por volta do ano 120, o astrólogo chinês Chang Hong (78-139) foi um dos primeiros em usar a aproximação $\sqrt{10}$, que deduziu da razão entre o volume de um cubo e a respectiva esfera inscrita. Um século depois, o astrônomo Wang Fang o estimou em $\frac{142}{45}$ (3,155555), ainda que se desconheça o método empregado. Poucos anos depois, por volta do ano 263, o matemático Liu Hui foi o primeiro em sugerir que 3,14 era uma boa aproximação, usando um polígono de 96 ou 192 lados. Posteriormente estimou π como 3,14159 empregando um polígono de 3.072 lados.

No final do século V, o matemático e astrônomo chinês Zu Chongzhi calculou o valor de π em 3,1415926 ao qual chamou «*valor por falta*» e 3,1415927 «*valor por excesso*», e deu duas aproximações racionais de π: $\frac{22}{7}$ e $\frac{355}{113}$, ambas muito conhecidas, sendo a última aproximação tão boa e precisa que não foi igualada por mais de nove séculos.

Zu Chongzhi (429-500)

Matemática indiana

Usando um polígono regular inscrito de 384 lados, no final do século V, o matemático indiano Aryabhata estimou o valor em 3,1416. Pela metade do século VII, estimando incorreta a aproximação de Aryabhata, Brahmagupta calcula π como $\sqrt{10}$, cálculo este muito menos preciso que o de seu predecessor. Por volta de 1400, Madhava obtém uma aproximação exata até 11 dígitos (3,14159265359), sendo o primeiro a empregar séries para realizar a estimativa.

Aryabhata (476-550)

Brahmagupta (598-660)

Matemática islâmica

No século IX Al-Jwarizmi em sua "Álgebra" (*Hisab al yabr ua al muqabala*) faz notar que o homem prático usa $\frac{22}{7}$ como valor de π, o geômetra usa 3, e o astrônomo 3,1416. No século XV, o matemático persa Ghiyath al-Kashi foi capaz de calcular o valor aproximado de π com nove dígitos, empregando uma base numérica sexagesimal, o que equivale a uma aproximação de 16 dígitos decimais: 2π = 6,2831853071795865.

Ghiyath al-Kashi (1350-1439)

Renascimento europeo

John Wallis, (1616–1703).

Leonhard Euler, (1707–1783).

A partir do século XII, com o uso de cifras arábicas nos cálculos, facilitou muito a possibilidade de obter melhores cálculos para π. O matemático Fibonacci, em sua «*Practica Geometriae*», amplificou o método de Arquimedes, proporcionando um intervalo mais estreito. Alguns matemáticos do século XVII, como Viète, usaram polígonos de até 393.216 lados para se aproximar com boa precisão a 3,141592653.

Em 1593 o flamengo Adriaan van Roomen (*Adrianus Romanus*) obtém uma precisão de 16 dígitos decimais usando o método de Arquimedes.

Época moderna (pré-computacional)

Em 1610 o matemático Ludolph van Ceulen calculou os 35 primeiros decimais de π. Diz-se que estava tão orgulhoso desta façanha que o mandou gravar em sua lápide. Os livros de matemática alemães, durante muitos anos, denominaram a π como *número ludolfiano*. Em 1665 Isaac Newton desemvolve a série:

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{1\times 3}{2\times 4}\times\frac{x^5}{5} + \frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6}\times\frac{x^7}{7} + ...$$

Com $x = \frac{1}{2}$ obteve uma série para $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$.

O matemático inglês John Wallis desenvolveu, em 1655, a conhecida série *Produto de Wallis*:

$$\frac{2}{1}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{5}\times\frac{6}{7}\times\frac{8}{7}\times\frac{8}{9}\times.......... = \frac{\pi}{2}$$

Em 1699, por sugestão de Edmond Halley, o matemático inglês Abraham Sharp (1651-1742) calculou π com uma precisão de 71 dígitos decimais usando a *série de Gregory*:

$$arctag(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ....$$

Com $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ se obtém uma série para $arctag\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$. Para alcançar a precisão obtida, deve ter usado ao redor de trezentos termos na série. Em 1720 o francês Thomas Fantet de Lagny utilizou o mesmo método para obter uma aproximação de 127 dígitos (só os primeiros 112 eram corretos).

Abraham Sharp (1651-1742)

Thomas Fantet de Lagny (1660-1734)

Leibniz calculou, de uma forma mais complicada, em 1682, a seguinte série matemática que leva seu nome:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots\ldots\ldots=\frac{\pi}{4}$$

Foi no ano de 1706 quando William Jones afirmou: «3,14159 andc. = π». Leonhard Euler adotou o conhecido símbolo em 1737, que se converteu na anotação habitual até nossos dias.

O matemático japonês Takebe iniciou a calcular o número π no ano de 1722, com o mesmo método exposto por Arquimedes, e foi ampliando o número de lados para polígonos circunscritos e inscritos até chegar a 1.024 lados. Este ingrato trabalho conseguiu que se determinasse π com 41 decimais.

Em 1789 o matemático de origem eslovaca Jurij Vega, mediante a fórmula de John Machin, descoberta em 1706, foi o primeiro em averiguar os primeiros 140 decimais de π, dos quais 126 eram corretos; este recorde se manteve durante 52 anos, até que em 1841 William Rutherford calculou 208 decimais, dos quais 152 eram corretos.

Jurij Veja (1754-1802)

O matemático aficionado de origem inglesa William Shanks dedicou cerca de 20 anos a calcular π e chegou a obter 707 decimais em 1873. No ano de 1944, D. F. Ferguson encontrou um erro na posição decimal 528 da *série de Shanks*, a partir do qual todos os dígitos posteriores eram errôneos. Em 1947, Ferguson recalculou π com 808 decimais com a ajuda de uma calculadora mecânica.

Algumas aproximações históricas de valores de π, anteriores a época computacional, são mostradas na seguinte tabela:

Ano	**Matemático ou documento**	**Cultura**	**Aproximação**	**Error** (em partes por milhão)
~1900 a.C.	Papiro de Ahmes	Egípcia	$2^8/3^4$ ~ 3,1605	6016 ppm
~1600 a.C.	Tábua de Susa	Babilônica	25/8 = 3,125	5282 ppm
~600 a.C.	A Bíblia (Reis I, 7,23)	Judia	3	45070 ppm
~500 a.C.	Bandhayana	Índia	3,09	16422 ppm
~250 a.C.	Arquimedes de Siracusa	Grega	entre 3 10/71 e 3 1/7 empregou 211875/67441 ~ 3,14163	<402 ppm 13,45 ppm
~150	Claudio Ptolomeu	Grego-egípcia	377/120 = 3,141666...	23,56 ppm
263	Liu Hui	China	3,14159	0,84 ppm
263	Wang Fan	China	157/50 = 3,14	507 ppm
~300	Chang Hong	China	$10^{1/2}$ ~ 3,1623	6584 ppm
~500	Zu Chongzhi	China	entre 3,1415926 e 3,1415929 empregou 355/113 ~ 3,1415929	<0,078 ppm 0,085 ppm
~500	Aryabhata	Índia	3,1416	2,34 ppm
~600	Brahmagupta	Índia	$10^{1/2}$ ~ 3,1623	6584 ppm
~800	Al-Juarismi	Persa	3,1416	2,34 ppm
1220	Fibonacci	Italiana	3,141818	72,73 ppm
1400	Madhava	Índia	3,14159265359	0,085 ppm
1424	Al-Kashi	Persa	2п = 6,2831853071795865	0,1 ppm

Época moderna (computacional)

Desde a construção do primeiro computador se iniciaram a desenvolver programas para o cálculo do número π com a maior quantidade de cifras possíveis. Desta forma, em 1949 um ENIAC foi capaz de romper todos os recordes obtendo 2037 cifras decimais em 70 horas. Pouco a pouco foram surgindo computadores que batiam recordes e, desta forma, poucos anos depois (1954) um NORAC chegou a 3092 cifras. Durante quase toda a década dos anos 1960 os IBM foram batendo recordes, até que um IBM 7030 pode chegar, em 1966, a 250.000 cifras decimais (8:23h). Durante esta época se experimentavam os novos computadores com algoritmos para a geração de séries de números procedentes de π.

Na década de 2000, os computadores são capazes de obter um número imensamente grande de decimais; em 2009 se chegou a mais de dois bilhões e meio de decimais mediante o uso de um supercomputador T2K Tsukuba System, formado por 640 computadores de alto rendimento, que juntos conseguem velocidades de processamento de 95 teraflops. Para isso necessitaram de 73:36h.

Ano	**Descobridor**	**Computador utilizado**	**Número de cifras decimais**
1949	G.W. Reitwiesner et al.	ENIAC	2.037
1954		NORAC	3.092
1959	Guilloud	IBM 704	16.167
1967		CDC 6600	500.000
1973	Guillord e Bouyer	CDC 7600	1.001.250
1981	Miyoshi e Kanada	FACOM M-200	2.000.036
1982	Guilloud		2.000.050
1986	Bailey	CRAY-2	29.360.111
1986	Kanada e Tamura	HITAC S-810/20	67.108.839
1987	Kanada, Tamura, Kobo et al	NEC SX-2	134.217.700
1988	Kanada e Tamura	Hitachi S-820	201.326.000
1989	Hermanos Chudnovsky	CRAY-2 y IBM-3090/VF	480.000.000
1989	Hermanos Chudnovsky	IBM 3090	1.011.196.691
1991	Hermanos Chudnovsky		2.260.000.000
1994	Hermanos Chudnovsky		4.044.000.000
1995	Kanada e Takahashi	HITAC S-3800/480	6.442.450.000
1997	Kanada e Takahashi	Hitachi SR2201	51.539.600.000
1999	Kanada e Takahashi	Hitachi SR8000	68.719.470.000
1999	Kanada e Takahashi	Hitachi SR8000	206.158.430.000
2002	Kanada et al.	Hitachi SR8000/MP	1.241.100.000.000
2004		Hitachi	1.351.100.000.000
2009	Daisuke Takahashi	T2K Tsukuba System	2.576.980.370.000

Na *época computacional do cálculo de* π as cifras dispararam, não só devido a potencia de cálculo que estas máquinas são capazes de gerar, se não também pelo prestigio que ocasiona ao construtor da máquina quando sua marca aparece na lista dos recordes.

Definições

Euclides de Alexandria foi o primeiro em demonstrar que a relação entre uma circunferência e seu diâmetro é uma quantidade constante. Não obstante, existem diversas definições do número π, porém a mais comum é:

- π é a relação entre a comprimento da circunferência e seu diâmetro.

Entretanto, também é:

- A área de um círculo unitário (de raio unidade do plano euclidiano).
- O menor número real x positivo tal que sen(x) = 0.

Também é possível definir analiticamente π, duas definições são possíveis:

- A equação sobre os números complexos $e^{ix} + 1 = 0$ admite uma infinidade de soluções reais positivas, a menor das quais é precisamente π.
- A equação diferencial $S''(x) + S(x) = 0$ com as condições de contorno $S(0) = 0$, $S'(0) = 1$ para a que existe solução única, garantida pelo teorema de Picard-Lindelöf, é uma função analítica cuja raiz positiva menor é precisamente π.

Euclides de Alexandria (325-265 a.C.)

Número irracional e transcendente

Artigo principal: Prova de que π é irracional

Trata-se de um número irracional, o que significa que não pode ser expresso como fração de dois números inteiros, como demonstrou

Johann Heinrich Lambert em 1761 (ou 1767). Também é um número transcendente, isto quer dizer, que não é a raiz de nenhum polinômio de coeficientes inteiros. No século XIX o matemático alemão Carl Louis Ferdinand von Lindemann demonstrou este efeito, encerrando com ele definitivamente a permanente e árdua investigação acerca do problema da quadratura do círculo indicando que não tem solução.

Também se sabe que π tão pouco é um número de *Liouville* (Mahler, 1953), isto quer dizer, não só é transcendental se não que não pode ser aproximado por uma sequência de racionais "rapidamente convergente" (Stoneham 1970).

Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852-1939)

As primeiras cinquenta cifras decimais

A pesar de se tratar de um número irracional continua sendo averiguada a máxima quantidade possível de decimais. As cinquenta primeiras são:

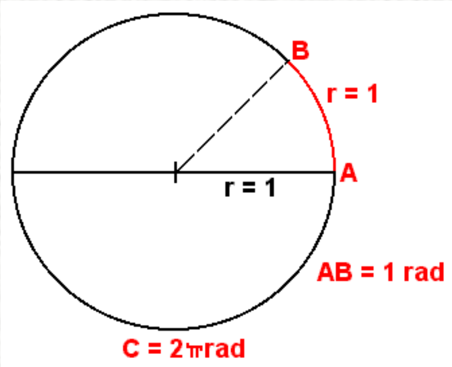
π ≈ 3,1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510

Em ciência e engenharia, esta constante pode ser empregada, na maioria das vezes, com uma precisão de somente uma dezena de decimais. Com cinquenta decimais se poderia descrever com precisão a curvatura do Universo com um erro menor que o tamanho de um próton.

Fórmulas que contém π

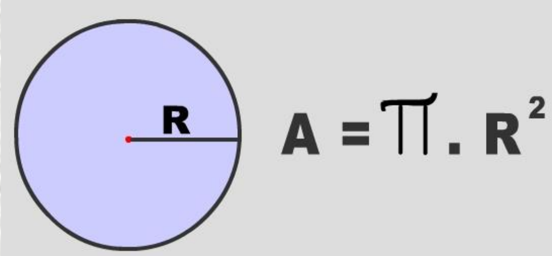
Em geometria

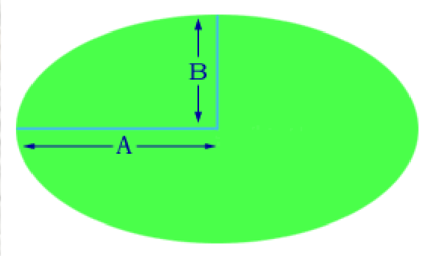
- Comprimento da circunferência de raio r: C = $2 \pi r$



Áreas de seções cônicas:

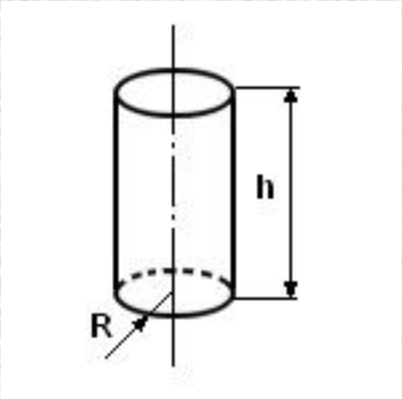
- Área do círculo de raio r: $A = \pi r^2$
- Área da elipse com semi-eixos "a" e "b": $A = \pi ab$

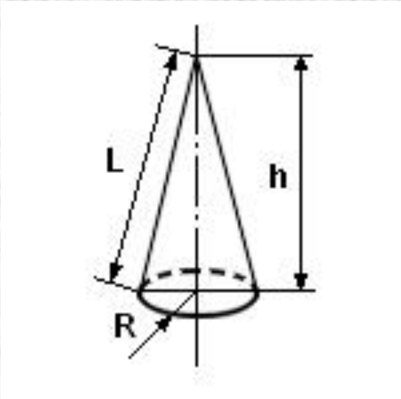


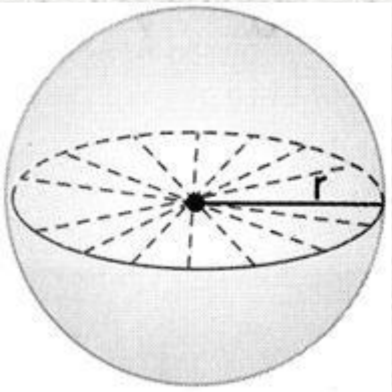


Áreas de corpos de revolução:

- Área do cilindro: $2 \pi r (r+h)$
- Área do cone: $\pi r^2 + \pi r g$
- Área da esfera: $4 \pi r^2$



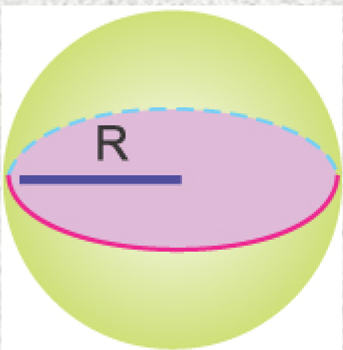


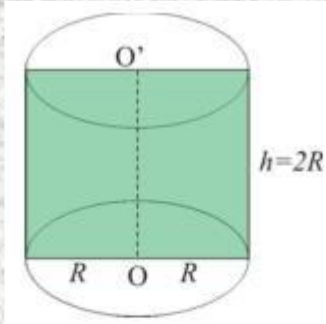


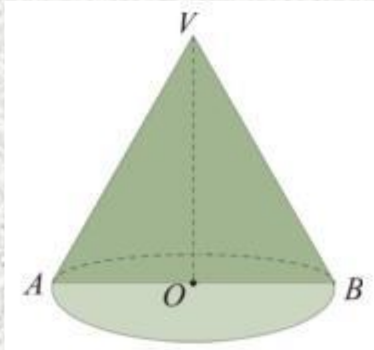
Volumes de corpos de revolução:

- Volume da esfera de raio r: $V = (4/3) \pi r^3$
- Volume de um cilindro reto de raio r e altura h: $V = \pi r^2 h$

- Volume de um cone reto de raio *r* e altura *h*: V = π *r*² *h* / 3







Equações expresas em radianos:

- Ângulos: 180 grãos são equivalentes a π radianos.

Em probabilidade

- A probabilidade de que dois números inteiros positivos escolhidos ao azar sejam primos entre si é: 6/π²
- Se for escolhido ao azar dois números positivos menores que 1, a probabilidade de que junto com o número 1 possam ser os lados de um triângulo obtusângulo é: (π-2)/4
- O número médio de formas de escrever um número inteiro positivo como soma de dois quadrados perfeitos é π/4 (a ordem é relevante).
- Agulha de Buffon: se lançarmos ao azar uma agulha de comprimento L sobre uma superfície na qual tenha desenhado linhas paralelas separadas numa distância D, a probabilidade de que a agulha corte uma linha é: Dπ/2L

Em análise matemática

- Fórmula de Leibniz:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots\ldots=\frac{\pi}{4}$$

- Produto de Wallis:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2}{4n^2-1}=\frac{2}{1}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{5}\times\frac{6}{7}\times\frac{8}{7}\times\frac{8}{9}\times\ldots\ldots\ldots=\frac{\pi}{2}$$

- Euler:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n n!^2}{(2n+1)!}=1+\frac{1}{3}+\frac{1\times 2}{3\times 5}+\frac{1\times 2\times 3}{3\times 5\times 7}+\ldots\ldots=\frac{\pi}{2}$$

- Identidade de Euler:

$$e^{\pi i}+1=0$$

- Área sob a campanha de Gauss:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$$

- Fórmula de Stirling:

$$n!\approx\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

- Problema de Basilea, resolvido por Euler em 1735:

$$\zeta(2)=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^4}+\ldots\ldots=\frac{\pi^2}{6}$$

- Euler:

$$\zeta(4)=\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\ldots\ldots=\frac{\pi^4}{90}$$

- Ademais, π tem várias representações como frações contínuas:

$$\frac{4}{\pi}=1+\frac{1}{4}=3+\frac{4}{9}=5+\frac{9}{16}=7+\frac{16}{25}=9+\frac{25}{36}=11+\frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}$$

- Também como desenvolvimento em séries:

$$\pi=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2(-1)^k 3^{\frac{1}{2}-k}}{2k+1}$$

- Formas de representação aproximada a π

$$\frac{355}{113} = 3{,}141592.....$$

$$\sqrt[29]{2614245132384461} \approx \pi$$

- Método de Monte Carlo

Em um circulo de raio *r* inscrito em um quadrado de lado 2R (2 vezes o raio), a área do círculo é πr^2 e a do quadrado $(2r)^2$. Disto se deduz que a relação de área entre o quadrado e o círculo é de $\pi/4$.

Cômputos de π

Categoria principal: Algoritmos de cálculo de π

Pi e os números primos:

Utilizando o inverso do produto de Euler para a função zeta de Riemann e para o valor do argumento igual a 2 se obtém:

$$\frac{1}{\zeta(2)} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ p_n \in P}} \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\left(1-\frac{1}{7^2}\right)\left(1-\frac{1}{11^2}\right).....\left(1-\frac{1}{p^2{}_n}\right) = \frac{6}{\pi^2}$$

onde p_n é o enésimo número primo. Euler foi o primeiro e achar este valor da função zeta (empregando a expressão de somatório) e resolvendo assim o famoso Problema de Basilea.

Fórmula de Machin

Uma forma exata de poder calcular π em termos de tangentes inversas de frações unitárias é a fórmula de Machin, descoberta em 1706:

$$\frac{\pi}{4} = 4arctag\frac{1}{5} - arctag\frac{1}{239}$$

Muitos matemáticos empregaram esta fórmula para averiguar dígitos acima da centena (por exemplo, o já citado Shanks, que com esta fórmula calculou 707 posições decimais de π).

Métodos eficientes

Os primeiros milhões de dígitos de π e 1/π podem ser consultados em Projetos Gutenberg. Um dos recordes mais recentes foi alcançado em dezembro de 2002 por Yasumasa Kanada da Universidade de Tokio, fixando o número π com 1.241.100.000.000 dígitos; foi necessário umas 602 horas com um supercomputador de 64 nodos Hitachi SR8000 com uma memória de um terabyte capaz de levar a cabo 2 bilhões de operações por segundo, mais de seis vezes o recorde prévio (206 mil milhões de dígitos). Para isso foi empregado as seguintes modificadas de Machin:

Yasumasa Kanada (1949)

- K. Takano (1982).

$$\frac{\pi}{4} = 12arctag\frac{1}{49} + 32arctag\frac{1}{57} - 5arctag\frac{1}{239} + 12arctag\frac{1}{110443}$$

- F. C. W. Störmer (1896).

$$\frac{\pi}{4} = 44arctag\frac{1}{57} + 7arctag\frac{1}{239} - 12arctag\frac{1}{682} + 24arctag\frac{1}{12943}$$

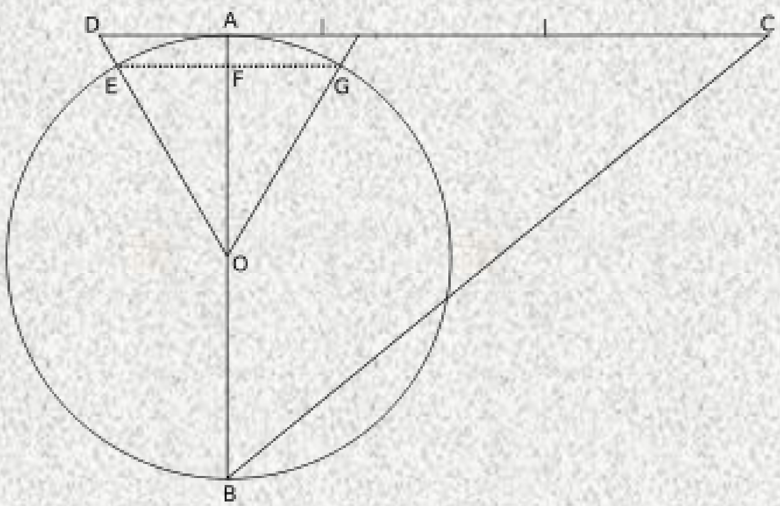
Estas aproximações proporcionaram uma quantidade tão grande de dígitos que se pode dizer que já não é útil se não para comprovar o funcionamento dos supercomputadores. A limitação não está no computador se não na memória necessária para armazenar uma cadeia com uma quantidade tão grande de números.

Aproximações geométricas a π

É possível obter uma aproximação ao valor de π de forma geométrica. Isto, já os gregos haviam tentado obter sem êxito a uma solução exata ao problema do valor de π mediante o emprego de régua e compasso. O problema grego conhecido como quadratura do círculo ou, o que é o mesmo, obter um quadrado de área igual à área de um círculo qualquer, leva implícito o cálculo do valor exato de π.

Uma vez demonstrado que era impossível a obtenção de π mediante o uso de régua e compasso, se desenvolveram vários métodos aproximados. Duas das soluções aproximadas mais elegantes são as devidas a Kochanski (usando régua e compasso) e a de Mascheroni (empregando unicamente um compasso).

Método de Kochanski



Método de Kochanski.

Desenha-se uma circunferência de raio R. Se inscreve o triângulo equilátero OEG. Traça-se uma reta paralela ao segmento EG que passe por A, prolongando-a até que corte o segmento OE, obtendo-se D. Do ponto D e sobre esse segmento se transporta 3 vezes o raio da circunferência e se obtém o ponto C. O segmento BC é aproximadamente a metade do comprimento da circunferência.

Demostração (supondo-se R = 1)

$$BC^2 = AB^2 + (3 - DA)^2$$

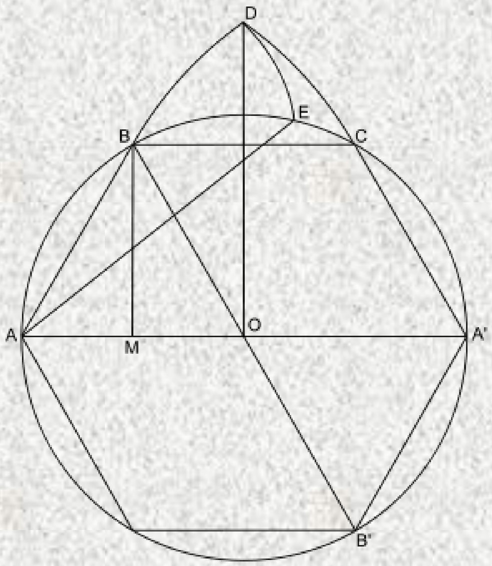
$$OF = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{DA}{EF} = \frac{OA}{OF} \rightarrow \frac{DA}{1/2} = \frac{1}{\sqrt{3/2}} \rightarrow DA = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Substituindo na primeira fórmula:

$$BC^2 = 2^2 + \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \to BC = \sqrt{\frac{40 - 6\sqrt{3}}{3}} = 3{,}141533\ldots$$

Método de Mascheroni



Método de Mascheroni.

Método desenvolvido por Lorenzo Mascheroni: se desenha uma circunferência de raio R e se inscreve um hexágono regular. O ponto D é a intersecção de dois arcos de circunferência: BD com centro em A', e CD com centro em A. Obtemos o ponto E como intersecção do arco DE, com centro em B, e a circunferência. O segmento AE é um quarto do comprimento da circunferência, aproximadamente.

Demostração (supondo-se R = 1)

$$AD = AC = \sqrt{3} \quad OD = \sqrt{3-1} = \sqrt{2}$$

$$BE = BD = \sqrt{(OD - MB)^2 + MO^2}$$

$$BE = BD = \sqrt{\left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} = \sqrt{3 - \sqrt{6}}$$

Pelo teorema de Ptolomeo, no quadrilátero ABEB'

$$BB' \times AE = AB \div EB' + BE \times AB'$$

$$2 \times AE = \sqrt{1 + \sqrt{6}} + \sqrt{9 - 3\sqrt{6}} = 3{,}142399\ldots$$

Uso em matemática e ciência

π é ubíquo em matemática; aparece incluso em lugares que carecem de uma conexão direta com os círculos da geometria euclideana.

Geometria e trigonometria

Área de um círculo

Para qualquer círculo de raio *r* e diâmetro *d* = 2*r*, o comprimento da circunferência é πd e a área do círculo é πr^2. Ademais, π aparece em fórmulas para áreas e volumes de muitas outras figuras geométricas relacionadas com a circunferência, como elipses, esferas, cones, e tiróides. π aparece em integrais definidas que descrevem a circunferência, área ou volume de figuras geradas por circunferências e círculos. No caso básico, a metade da área de um círculo unitário é:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

e a metade do comprimento da circunferência unitária é:

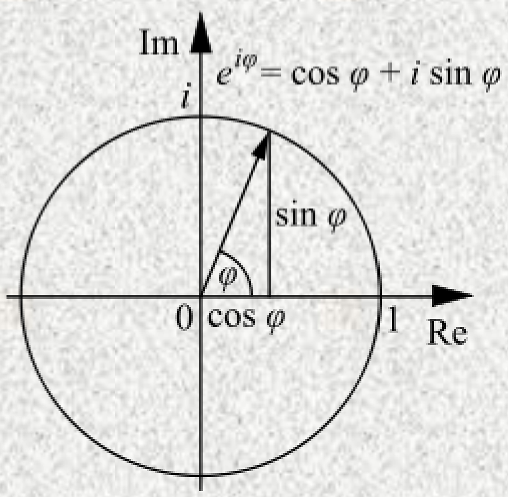
$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \pi$$

Pode-se integrar formas mais complexas como sólidos de revolução.

Da definição das funções trigonométricas desde o círculo unitário se chega a que o seno e o coseno tenham período 2π. O que significa, para todo *x* e inteiros *n*, $\text{sen}(x) = \text{sen}(x + 2\pi n)$ e $\cos(x) = \cos(x + 2\pi n)$. Porque $\text{sen}(0) = 0$, $\text{sen}(2\pi n) = 0$ para todos os inteiros *n*. Além disso, o ângulo 180° é igual a π radianos. Em outras palavras 1° = (π/180) radianos.

Em matemática moderna, π é *definido* usando funções trigonométricas, por exemplo como o menor inteiro positivo *x* para o qual sen*x* = 0, para evitar dependências desnecessárias das sutilezas da geometria euclidiana e a integração. Equivalentemente, π pode ser definido usando funções trigonométricas inversas, por exemplo como $\pi = 2 \arccos(0)$ ou $\pi = 4 \text{ arctag}(1)$. Expandir funções trigonométricas inversas como séries de potencias é a maneira mais fácil de obter séries infinitas para π.

Análise superior e teoria de números



A frequente aparição de π em análises complexas pode estar relacionada com o comportamento da função exponencial de uma variável complexa, descrita pela fórmula de Euler

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + isen\varphi$$

onde *i* é a unidade imaginária que satisfaz a equação $i^2 = -1$ e $e \approx 2{,}71828$ é o número de Euler. Esta fórmula implica que as potencias imaginárias de *e* descrevem rotações em um círculo unitário no lado complexo; estas rotações têm um período de 360º = 2π. Em particular, a rotação de 180º $\varphi = \pi$ resulta na notável identidade de Euler

$$e^{i\pi} = -1$$

Tem *n* diferentes raízes enésimas da unidade

$$e^{2\pi ik/n} \quad (k = 0,1,2,\ldots n-1)$$

A integral de Gauss

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

Uma consequência é que o resultado da divisão entre a função gama de um semi-inteiro (a metade de um número impar) e √π é um número racional.

Física

Ainda que não seja uma constante física, π aparece rotineiramente em equações que descrevem os princípios fundamentais do Universo, devido, em grande parte, a sua relação com a natureza do círculo e, correspondentemente, com o sistema de coordenadas esféricas. Usando unidades como as unidades de Planck se pode eliminar as vezes π das fórmulas.

- A constante cosmológica:

$$\wedge = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho$$

- Princípio de incerteza de Heisenberg:

$$\Delta x \Delta \rho \geq \frac{h}{4\pi}$$

- Equação de campo de Einstein da relatividade geral:

$$R_{ik} - \frac{g_{ik}R}{2} + \wedge g_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ik}$$

- Lei de Coulomb para a força elétrica:

$$F = \frac{|q_1 q_2|}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

- Permeabilidade magnética do vácuo:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\, N/A^2$$

- Terceira lei de Kepler:

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{(2\pi)^2}{G(M+m)}$$

Probabilidade e estatística

Em probabilidade e estatística, há muitas distribuições cujas fórmulas contém π, incluindo:

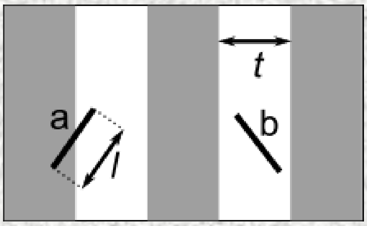
- a função de densidade de probabilidade para a distribuição normal com média μ e desvio padrão σ, que depende da integral gaussiana:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

- a função de densidade de probabilidade para a distribuição de Cauchy (padrão):

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

Nota-se que para todas as funções de densidade de probabilidade se cumpre que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, então as fórmulas anteriores podem ser usadas para produzir outras fórmulas integrais para **π**.



Representação da experiência do modelo da "agulha de Buffon", se lanças duas agulhas (*a*, *b*) ambas com comprimento *l*. No desenho a agulha **a** está cruzando a linha enquanto que a agulha **b** não.

O problema da agulha de Buffon é chamado em ocasiões como uma aproximação empírica de π. Trata-se de lançar uma agulha de comprimento *l* repetidamente sobre uma superfície na qual se traçou retas paralelas distanciadas entre si, em *t* unidades, de maneira uniforme (com *t* > *l* de forma que a agulha não possa tocar duas retas). Se a agulha for lançada *n* vezes e *x* dessas caem cruzando uma linha, então se pode aproximar π usando o Método de Monte Carlo, lançando-a uma grande quantidade de vezes:

$$\pi \approx \frac{2nl}{xt}$$

Ainda que este resultado seja matematicamente impecável, não se pode usar mais que para determinar uns quantos dígitos de π *experimentalmente*. Para se conseguir somente três dígitos corretos (incluindo o "3" inicial) necessita-se de milhões de lançamentos, e o número de lançamentos cresce exponencialmente com o número de dígitos desejados. Além disso, qualquer erro na medida dos comprimentos *l* e *t* se transfere diretamente como um erro na aproximação de π. Por exemplo, uma diferença de um simples átomo em uma agulha de 10 centímetros poderia acarretar erros no nono dígito do resultado. Na prática, incertezas na determinação de se a agulha na realidade cruza uma linha que parece estar somente tocando-a leva o limite de precisão alcançável a muito menos de 9 dígitos.

Dados interesantes

"Piso-Pi", mosaico na entrada do edifício de matemática em Berlin.

- O dia 22 de julho (22/7) é o dia dedicado a aproximação de π.
- O dia 14 de março (3/14 no formato da data nos Estados Unidos) se marca também como o dia π no qual os fãs deste número o celebram com diferentes atuações. Curiosamente é o aniversário de Einstein.
- 355/113 (~3.1415929) se menciona às vezes como uma simulação quase-perfeita!
- Os usuários do buscador A9.com que elegem sua loja virtual como amazon.com oferecendo descontos de (π/2)% em suas compras.
- John Squire (da banda The Stone Roses) menciona π em uma canção escrita para sua segunda banda The Seahorses denominada "Something Tells Me". A canção acaba com uma letra como: "What's the secret of life? It's 3,14159265, yeah yeah!!".
- O primeiro milhão de cifras de π e seu inverso 1/π se pode consultar no Projeto Gutenberg.
- A numeração das versões do programa de tratamento de texto TeX de Donald Knuth se realiza segundo os dígitos de π. A versão do ano 2002 foi denominada de 3,141592
- Emprega-se este número na série de sinais enviados da terra com o objetivo de ser identificado por uma civilização inteligente extraterrestre.
- A probabilidade de que dois inteiros positivos escolhidos ao acaso sejam primos entre si é de $6 / \pi^2$

- Existem programas na internet que buscam teu número de telefone nas 50.000.000 primeiras cifras de π.
- No ano 2002 o japonês Akira Haraguchi rompeu o recorde mundial recitando, durante 13 horas, 83.431 dígitos do número π sem parar, dobrando o recorde anterior de posse do também japonês Hiroyuki Goto. Em 4 de outubro de 2006, às 1:30h da madrugada, e depois de 16 horas e meia, Haraguchi voltou a quebrar seu próprio recorde recitando 100.000 dígitos do número π, realizando uma parada a cada duas horas de 10 minutos para tomar ar.
- O máximo número de dígitos de π necessário para buscar qualquer sequência de dia-mes-ano com quatro dígitos, na expansão decimal de π é 60.872.
- Existe uma canção de Kate Bush chamada "Pi" na qual se recitam mais de vinte dígitos decimais do número.
- Na Argentina, o número telefônico móvel para emergências nas estações de trens e subterrâneos é o número π: 3,1416.
- Na Inglaterra apareceu um Crop Circle que ao ser investigado por científicos Estado Unidenses, revelou que seu significado era o de π (pi)

Referências

1. Arndt J.& Haenel C. 2001. *Pi unleashed* (trad. de C. e D. Lischka). Berlin, Nova York: Springer, p. 188 e 228. ISBN: 978-3-540-66572-4.
2. Bailey, D. H. 1988. "Numerical Results on the Transcendence of Constants Involving π, e and Euler's Constant." Math. Comput. 50:275-281.
3. Bailey, D. H. 2003. Some Background on Kanada's Recent Pi Calculation.
4. Bailey, D. H.; Borwein, P. B.; Borwein, J. M. 1997. "The Quest for Pi". Mathematical Intelligencer (1): 50-57.
5. Bailey, D.H.; Borwein, J.M.; Borwein, P.B.; Plouffle, S. 1997. "The quest for Pi", *The Mathematical Intelligencer* 19, 50-57.
6. *BBC News,* 2005 (2 de febrero de 2005). «Japonês rompe o recorde de memorizar cifras de pi». Consultado em 30/10/2007.
7. Beckmann, P. 1971. *A History of Pi*, publicado pela primeira vez por The Golem Press, 1971, edição consultada por Barnes and Noble Books, New York, 1993.
8. Bogomolny, A. 2001. «Math Surprises: An Example». *cut-the-knot*. Consultado em 28/10/2007.
9. Boyer, C. 1999. *Historia de la Matemática*. Madrid : Alianza Editorial. 84-206-8186-5.
10. Calculation of Pi Using the Monte Carlo Method
11. Cohen,G.L. & Shannon,A.G. 1981. John Ward's method for the calculation of pi, Historia Mathematica 8 (2), 133-144.
12. *Datastructures* 2007. «The Monte Carlo algorithm/method». Consultado em 07/11/2007.
13. Einstein, A. 1916. «The Foundation of the General Theory of Relativity» *Annalen der Physik*.

14. Euclides, *Elementos. Libro V*
15. Existen otras doce representaciones de π en http://functions.wolfram.com/Constants/Pi/10/
16. http://www.mininterior.gov.ar/camarasenvivo/inicio.asp
17. Hui, L. MacTutor Biografy (ingles)
18. Imamura, J. M. 2005. «Heisenberg Uncertainty Principle». University of Oregon. Consultado em 09/11/2007.
19. Jami, C. 1988. *Une histoire chinoise du 'nombre π'.* Archive for History of Exact Sciences 38 (1), 39-50.
20. Jones, W. 1706. New Introduction to Mathematics, London.
21. Mahler, K. 1953. "On the Approximation of π." Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 56/Indagationes Math. 15, 30-42.
22. "Mazda Pi" em Gaussianos.com. Consultado em 23/04/2008.
23. Miller, C. «The Cosmological Constant» (PDF). University of Maryland. Consultado em 08/11/2007.
24. Nave, C. R. 2005. «Coulomb's Constant». *HyperPhysics*. Georgia State University. Consultado em 09/11/2007.
25. Neugebauer,O. 1957. "The Exact Sciences in Antiquity", Dover, New York, (nova edição de 1969).
26. NIST (2006 CODATA recommended values). «Magnetic constant». Consultado em 09/11/2007.
27. Penn State. «Área y circunferencia de un Círculo de Arquímedes».. Consultado em 08/11/2007.
28. Penn State.«Area and Circumference of a Circle by Archimedes». Consultado el 2007-11-08.
29. Pi em Mathworld . Consultado em 21/04/ 2008.
30. Ramaley, J. F. 1969. «Buffon's Noodle Problem» *The American Mathematical Monthly*. 76 (8): 916-918.
31. Ramanujan, S. 1913. «Squaring the circle» *Journal of the Indian Mathematical Society*.
32. Robins,G. & Shute,C. 1987. *The Rhind Mathematical Papyrus: an ancient Egyptian text*, British Museum Publications, London , ver “Squaring the Circle”, páginas 44 a 46.
33. Unidad imaginaria en Mathworld . Cosultado em 21/04/2008.
34. Volkov, A. 1994. *Calculation of π in ancient China: from Liu Hui to Zu Chongzhi*, Historia Sci. (2) 4 (2), 139-157.
35. Weisstein, E. W. «Unit Disk Integral». MathWorld. Consultado em 08/11/2007.
36. Weisstein, E. W. 2003. «Probability Function». MathWorld. Consultado em 08/11/2007.
37. Weisstein, E. W. 2004. «Gaussian Integral». MathWorld. Consultado em 08/11/2007.
38. Weisstein, E. W. 2005. «Buffon's Needle Problem». MathWorld. Consultado em 10/11/2007.
39. Weisstein, E. W. 2005. «Cauchy Distribution». MathWorld. Consultado em 08/11/2007.
40. Weisstein, E. W. 2006 «Solid of Revolution». MathWorld. Consultado em 08/11/2007.
41. Wikipedia Online, http://es.wikipedia.org/wiki/Numero_pi. Consultado em 10/10/2009.
42. Yomiuri Online, Consultado em 17/08/2009.