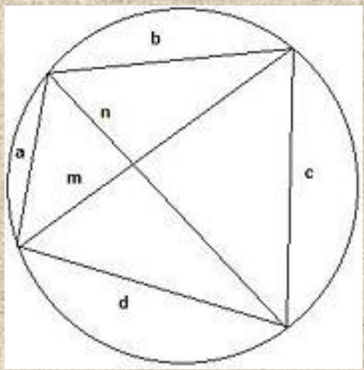
Teoremas

Iran Carlos Stalliviere Corrêa – Departamento de Geodésia-UFRGS **Abril/2012**

Teorema de Ptolomeu



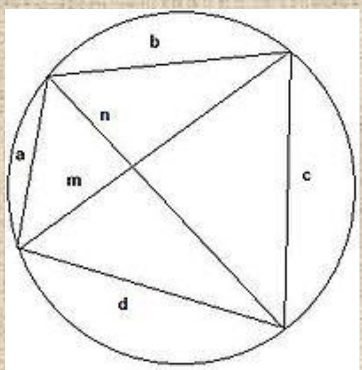
O Teorema de Ptolomeu refere-se a qualquer quadrilátero que se encontre inscrito por uma circunferência, o qual estabelece que "o produto das diagonais é igual a soma dos produtos dos lados opostos":

$$m \times n = (a \times c) + (b \times d)$$

Teorema de Hiparco

O Teorema de Hiparco, o qual muitas vezes é confundido com o teorema de Ptolomeu diz que: "para qualquer quadrilátero inscrito em uma circunferência, a razão entre as diagonais é igual a razão da soma dos produtos dos lados que concorrem com as respectivas diagonais".

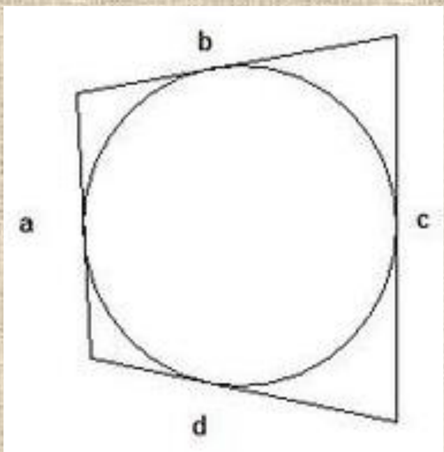
$$\frac{m}{n} = \frac{(a \times d) + (b \times c)}{(a \times b) + (c \times d)}$$



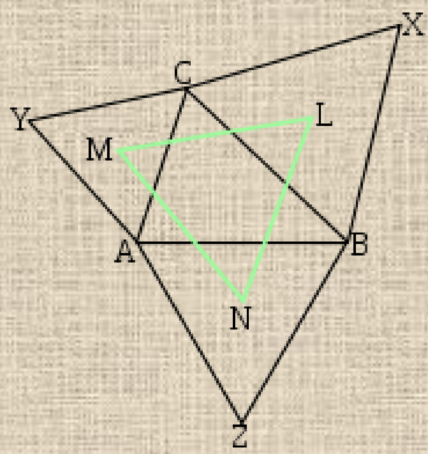
Teorema de Pitot

O Teorema de Pitot faz referência a qualquer quadrilátero convexo que se encontre circunscrito a uma circunferência e estabelece que: "a soma dos lados opostos do quadrilátero são congruentes".

$$a + c = b + d$$



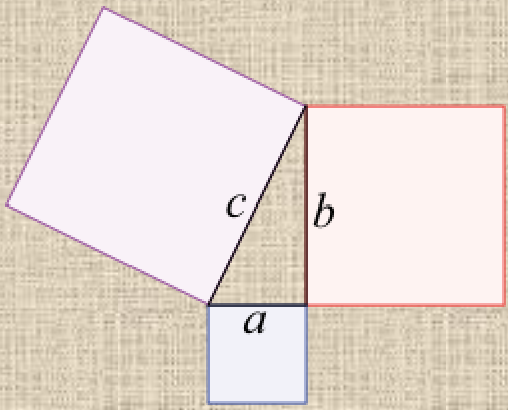
Teorema de Napoleão



O triângulo *MNL* formado pelos centros dos triângulos equiláteros sobre os lados do triângulo *ABC* é equilátero.

O Teorema de Napoleão (geralmente atribuído a Napoleão Bonaparte, que o teria enunciado em 1787) consiste em projetar um triângulo qualquer e cada lado desse forme um triângulo equilátero, contudo marcando o baricentro de cada triângulo e juntando os pontos sempre se obterá um triângulo equilátero.

Teorema de Pitágoras



O Teorema de Pitágoras estabelece que: a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos (*a* e *b*) equivale à área do quadrado construído sobre a hipotenusa (*c*).

O Teorema de Pitágoras é provavelmente o mais célebre dos teoremas da matemática. Enunciado pela primeira vez por filósofos gregos chamados de pitagóricos, estabelece uma relação simples entre o comprimento dos lados de um triângulo retângulo:

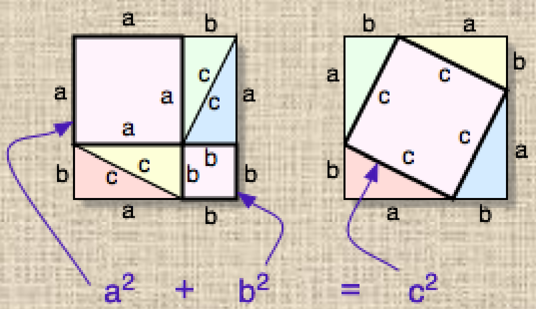
Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Se *c* designar o comprimento da hipotenusa e *a* e *b* os comprimentos dos catetos, o teorema afirma que:

$$a^2 + b^2 = c_2$$

Demonstração

Não se sabe ao certo qual foi a demonstração utilizada por Pitágoras, entretanto, muitos autores concordam que ela foi feita através da comparação de áreas, conforme se segue:



Provável forma usada por Pitágoras para demonstrar o teorema que leva o nome.

1. Desenha-se um quadrado de lado $b + a$;
2. Traçam-se dois segmentos paralelos aos lados do quadrado;
3. Divide-se cada um destes dois retângulos em dois triângulos retos, traçando as diagonais. Chama-se c o comprimento de cada diagonal;
4. A área da região formada ao retirar os quatro triângulos retos é igual a $b^2 + a^2$;
5. Desenha-se agora o mesmo quadrado de lado $b + a$, mas colocamos os quatro triângulos retos noutra posição.
6. A área da região formada quando se retiram os quatro triângulos retos é igual a c^2.

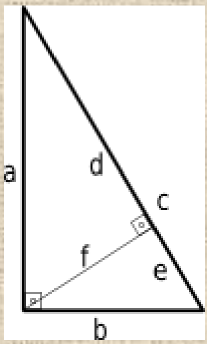
Como $b^2 + a^2$ representa a área do quadrado maior subtraída da soma das áreas dos triângulos retângulos, e c^2 representa a mesma área, $b^2 + c^2 = a^2$. Ou seja: num triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos. O segmento de medida *a* foi chamado de hipotenusa e os de medida *b* e *c* foram chamados de catetos.

Outros matemáticos, muito antes de Pitágoras, conheciam o teorema. Nenhum deles, até então, havia conseguido demonstrar que ele era válido para qualquer triângulo retângulo.

Talvez nenhuma outra relação geométrica seja tão utilizada em matemática como o Teorema de Pitágoras. Ao longo dos séculos foram sendo registrados muitos problemas curiosos, cujas resoluções têm como base este famoso teorema.

Algumas demonstrações do teorema adequadas à nossa época

Por semelhança de triângulos



$$\frac{d}{a}=\frac{a}{c} \Rightarrow d=\frac{a^2}{c} \quad (1)$$

$$\frac{e}{b}=\frac{b}{c} \Rightarrow e=\frac{b^2}{c} \quad (2)$$

Da figura $c=d+e$ e substituindo pelas equações (1) e (2):

$$c=\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{c}$$

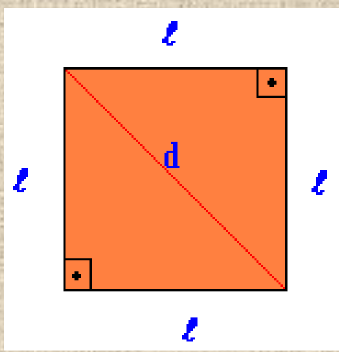
Multiplicando tudo por c:

$$c^2=a^2+b^2$$

Aplicações do teorema

O teorema de Pitágoras pode ser aplicado em diversas figuras:

Quadrado



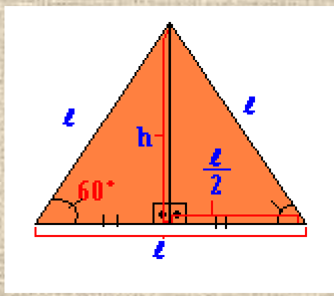
A diagonal do quadrado divide-o em dois triângulos retângulos congruentes. Sendo l o lado e d a diagonal, podemos definir que:

$$l^2+l^2=d^2 \quad \Rightarrow$$

$$2l^2 = d^2 \Rightarrow \sqrt{2l^2} \Rightarrow d = l\sqrt{2}$$

Triângulo equilátero

A altura do triângulo equilátero divide-o em dois triângulos retângulos congruentes; sendo *l* o lado e *h* a altura, podemos definir que:



$$l^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow l^2 = \frac{l^2}{4} + h^2 \Rightarrow \frac{4l^2}{4} = \frac{l^2}{4} + \frac{4h^2}{4} \Rightarrow 4l^2 = l^2 + 4h^2 \Rightarrow 4h^2 = 3l^2 \Rightarrow$$

$$h^2 = \frac{3l^2}{4} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} \Rightarrow h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Distância entre dois pontos

Seja $A = (x_1,y_1)$ e $B = (x_2,y_2)$. Para auxiliar, seja $C = (x_2,y_1)$.

Como A e C possuem mesma ordenada, $d(A,C) = |x_1 - x_2|$

Como B e C possuem mesma abcissa, $d(B,C) = |y_1 - y_2|$

Então: $d(A,B) = \sqrt{d(A,C)^2 + d(B,C)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

O teorema de Pitágoras na geometria esférica e hiperbólica

Seja *c* a hipotenusa de um triângulo rectângulo numa geometria não euclidiana e *a* e *b* os catetos. O Teorema de Pitágoras toma uma das seguintes formas:

- na geometria esférica, tem-se

$$\cos(c) = \cos(a)\cos(b)$$

- na geometria hiperbólica tem-se

$$\cosh(c) = \cosh(a)\cosh(b)$$

Teorema de Heron

A fórmula tradicional de cálculo da área do triângulo, ensinada e muito utilizada no ensino fundamental é

$$A = \left(\frac{base \times altura}{2} \right)$$

Entretanto, outras fórmulas foram desenvolvidas para demonstrar este cálculo. Uma delas é a fórmula de Heron, que dá a área do triângulo em função da medida dos três lados do triângulo. O nome faz referência ao matemático grego Heron de Alexandria.

A fórmula é:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

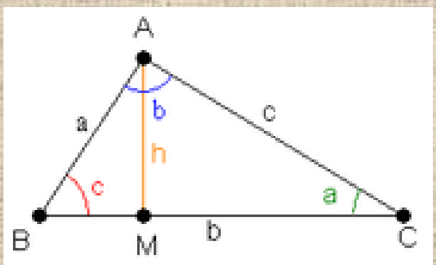
onde s representa o semiperímetro do triângulo e *a*, *b*, *c* são os comprimentos dos 3 lados do triângulo.

Exemplo

Um triângulo com lados 3, 25 e 26 tem semiperímetro (3 + 25 + 26)/2 = 27.

Assim, a sua área é. $A = \sqrt{27 \times 24 \times 2 \times 1} = 36$

Demonstração



Seja *b* a base do triângulo e *h* a sua altura. A área do triângulo é

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

Pelo teorema dos cossenos, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = a^2 + b^2 - 2b\sqrt{a^2 - h^2}$

logo

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}\right)^2$$

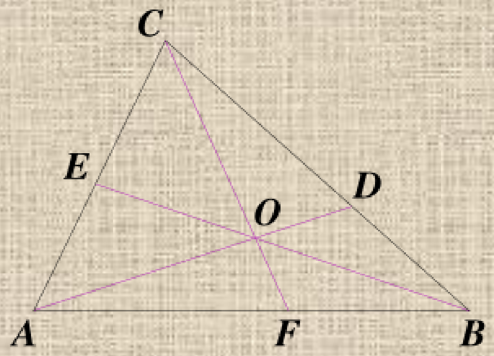
Assim,

$$A^2 = \frac{b^2h^2}{4} = \frac{b^2\left(a^2 - \left(a^2 + b^2c^2\right)^2\right)}{4} = \frac{(2ab)^2 - \left(a^2 + b^2 - c^2\right)^2}{16} = \frac{\left(2ab - \left(a^2 + b^2 - c^2\right)\right)\left(2ab + \left(a^2 + b^2 - c^2\right)\right)}{16} =$$

$$\frac{\left(c^2 - (a-b)^2\right)\left((a+b)^2 - c^2\right)}{16} = \frac{(c-a+b)(c+a-b)[a+b-c](a+b+c)}{16} = (s-a)(s-b)(s-c)s$$

Teorema de Ceva

O Teorema de Ceva é um teorema de geometria elementar que estabelece uma condição necessária e suficiente para que três cevianas sejam concorrentes. Este teorema, provado em 1678 por Giovanni Ceva, na sua obra *De lineis rectis*, afirma que três cevianas de um triângulo concorrem em um ponto se, e somente se,



$$CD \times FB \times AE = DB \times FA \times EC$$

Teorema de Abel-Ruffini

O Teorema de Abel-Ruffini é um teorema criado pelos matemáticos Paolo Ruffini (demonstração em 1799, contendo um pequeno erro) e Niels Henrik Abel (demonstração final em 1824).

O teorema afirma que não há uma solução geral através de radicais para as equações polinomiais de grau cinco ou superior. Note-se que o teorema não afirma que as equações polinomiais de ordem cinco ou superior não têm solução. Na verdade, se o polinômio tiver coeficientes reais ou complexos, e se se permitirem soluções complexas, então todos as equações polinomiais têm solução. Essa é aliás a proposição do teorema fundamental da álgebra. Ainda que essas soluções não possam ser calculadas com rigor, podem ser obtidas com um grau de precisão requerido usando métodos numéricos tais como o métodos de Newton-Raphson ou o de Laguerre.

O teorema refere-se simplesmente à forma que a solução pode ter. Assim, a solução de uma equação de grau cinco ou superior não pode ser sempre expressa a partir dos coeficentes e usando simplesmente as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação (incluindo-se nesta última a extração de raízes).

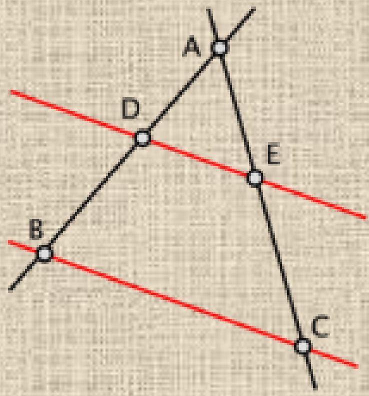
Tomemos como exemplo, a solução das equações polinomiais de segundo grau, usando a habitual equação quadrática: As raízes de $ax^2 + bx + c = 0$ são :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Fórmulas deste tipo existem também para as equações de terceira e quarta ordem.

O teorema afirma portanto que certas equações de quinta ordem não pode ser expressas por fórmulas daquele tipo. A equação $x^5 - x + 1 = 0$ é disso um exemplo. Algumas equações de quinto grau podem ser resolvidas por radicais. Um exemplo: $x^5 - x^4 - x + 1 = 0$. Os critérios de distinção entre um caso e o outro foram decobertos por Évariste Galois.

Teorema de Tales (interseção)

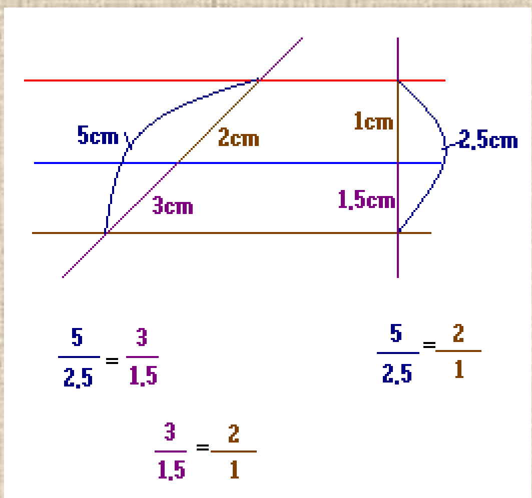


O Teorema de Tales diz que as razões *AD//AB*, *AE//AC* e *DE//BC* são iguais.

O Teorema de Tales foi proposto pelo filósofo grego Tales de Mileto, e afirma que quando duas retas transversais cortam um feixe de retas paralelas, as medidas dos segmentos delimitados pelas transversais são proporcionais. Para entender melhor o Teorema de Tales, é preciso saber um pouco sobre razão e proporção. Para a resolução de um problema envolvendo o Teorema de Tales, utiliza-se a propriedade fundamental da proporção, multiplicando-se os meios pelos extremos: os ângulos das retas tem a razão oposto pelo vértice da reta que os corta. Considerando-se o exemplo da figura acima:

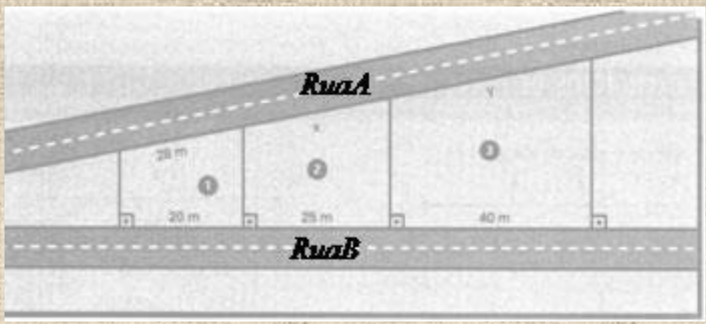
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = \frac{AB}{AC}$$

Esquema mostrando validade do Teorema de Tales



Exemplo

Ao analisar a planta de uma quadra de um determinado condomínio, o engenheiro constatou a ausência de algumas medidas nas divisas de certos lotes residenciais. Ele precisa calcular essas medidas do seu próprio escritório, com base nas informações da planta. Observe o desenho detalhado da situação:



Com base na planta devemos calcular os lados x e y dos lotes. Veja que as laterais dos lotes 1, 2 e 3 são perpendiculares às ruas A e B. A planta satisfaz a relação de Tales, então podemos utilizar o Teorema

$$\frac{28}{x} = \frac{20}{25} \qquad 20x = 700 \qquad x = \frac{700}{20} \qquad x = 35m$$

$$\frac{x}{y} = \frac{25}{40} \qquad \frac{35}{y} = \frac{25}{40} \qquad 25y = 1400 \qquad y = \frac{1400}{25} \qquad y = 56m$$

REFERÊNCIA

http://pt.wikipedia.org/wiki/Lista_de_teoremas