MUSEU DE TOPOGRAFIA PROF. LAUREANO IBRAHIM CHAFFE
DEPARTAMENTO DE GEODÉSIA - UFRGS

TRIGONOMETRIA

Texto original: **Wikipédia, a enciclopédia livre**

Fevereiro/2013

Ampliação e ilustrações: **Iran Carlos Stalliviere Corrêa-IG/UFRGS**

Trigonometria (do grego *trigōnon* "triângulo" + *metron* "medida") é um ramo da matemática que estuda as relações entre os comprimentos de 2 lados de um triângulo retângulo (*triângulo onde um dos ângulos mede 90 graus*), para diferentes valores de um dos seus ângulos agudos. A abordagem da trigonometria penetra outros campos da geometria, como o estudo de esferas usando a trigonometria esférica.

A **trigonometria** tem aplicações importantes em vários ramos, tanto como na matemática pura, quanto na matemática aplicada e, consequentemente, nas ciências naturais

Sobre a trigonometria

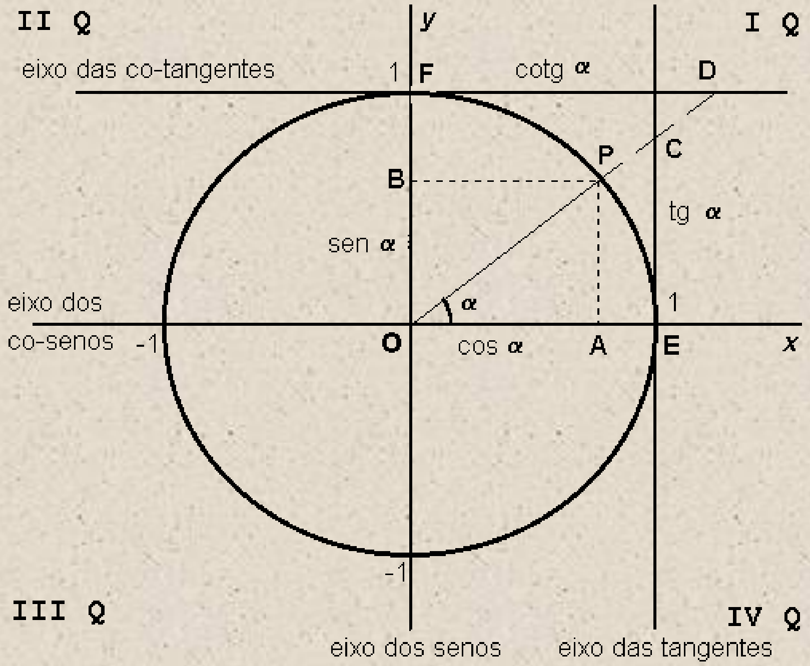
Dois triângulos são ditos ***semelhantes*** se um pode ser obtido pela expansão uniforme do outro. Este é o caso se, e somente se, seus ângulos correspondentes são iguais. O fato crucial sobre triângulos semelhantes é que *os* ***comprimentos de seus lados são proporcionais***. Isto é, se o maior lado de um triângulo é duas vezes maior que o lado do triângulo similar, então o menor lado será também duas vezes maior que o menor lado do outro triângulo, e o comprimento do lado médio será duas vezes o valor do lado correspondente do outro triângulo. Assim, a razão do maior lado e menor lado do primeiro triângulo será a mesma razão do maior lado e o menor lado do outro triângulo.

A partir destes fatos, definem-se as **funções trigonométricas**, começando pelos triângulos retângulos (*triângulos com um ângulo reto 90 graus ou π/2 radianos*). O maior lado em um triângulo qualquer é sempre o lado oposto ao maior ângulo e devido a soma dos ângulos de um triângulo ser 180 graus ou π radianos, o maior ângulo em um triângulo retângulo é o **ângulo reto**. O maior lado nesse triângulo, consequentemente, é o lado oposto ao ângulo reto, chamado de **hipotenusa** e os demais lados são chamados de **catetos**.

Dois triângulos retângulos que compartilham um segundo ângulo *A* são necessariamente similares, e a proporção (*ou razão*) entre o comprimento do lado oposto a *A* e o comprimento da hipotenusa será, portanto, a mesma nos dois triângulos. Este valor será um número entre 0 e 1 que depende apenas de *A*. Este número é chamado de **seno** de A e é escrito como sen(A). Similarmente, pode-se definir :

- o **cosseno** (*ou co-seno*) de *A*: é a proporção do comprimento do cateto adjacente ao ângulo *A* em relação ao comprimento da hipotenusa
- a **tangente** trigonométrica de *A*: é a proporção do comprimento do cateto oposto ao ângulo *A* em relação ao comprimento do cateto adjacente
- a **co-tangente** de *A*: é a proporção do comprimento do cateto adjacente ao ângulo *A* em relação ao comprimento do cateto oposto - é o inverso da tangente
- a **secante** trigonométrica de *A*: é a proporção do comprimento da hipotenusa em relação ao comprimento do cateto adjacente ao ângulo *A* - é o inverso do cosseno
- a **co-secante** de *A*: é a proporção do comprimento da hipotenusa em relação ao comprimento do cateto oposto ao ângulo *A* - é o inverso do seno.

Círculo Trigonométrico



Círculo trigonométrico

A **Trigonometria** é o ramo da Matemática que estuda a *proporção*, fixa, entre os comprimentos dos lados de um *triângulo retângulo*, para os diversos valores de um dos seus ângulos agudos. (*Entre estes ângulos, os de 30º, 45º e 60º são denominados ângulos notáveis.*) As proporções entre os 3 lados dos triângulos retângulos são denominadas de seno, cosseno, tangente e cotangente, dependendo dos lados considerados na proporção.

Já o **Círculo Trigonométrico** é um recurso criado para facilitar a visualização destas proporções entre os lados dos triângulos retângulos. Ele consiste em uma circunferência orientada de raio unitário, centrada na origem dos 2 eixos de um plano cartesiano ortogonal, ou seja, um plano definido por duas retas perpendiculares entre si, ambas com o valor 0 (*zero*) no ponto onde elas se cortam. Existem dois sentidos de marcação dos arcos no ciclo: o sentido positivo, chamado de anti-horário, que se dá a partir da origem dos arcos até o lado terminal do ângulo correspondente ao arco; e o sentido negativo, ou horário, que se dá no sentido contrário ao anterior.

Seno

Dado um triângulo retângulo, o **seno** de um dos seus 2 ângulos agudos é a proporção entre o comprimento do cateto oposto a este ângulo e o comprimento da hipotenusa, calculada, como toda proporção, pela divisão de um valor pelo outro, a referência da proporção.

No círculo trigonométrico, o **seno** de um ângulo qualquer pode ser visualizado na projeção do seu raio (*por definição igual a 1*) sobre o eixo vertical.

Cosseno

Dado um triângulo retângulo, o **cosseno** de um dos seus 2 ângulos agudos é a proporção entre o comprimento do cateto adjacente a este ângulo e o comprimento da hipotenusa, calculada, como toda proporção, pela divisão de um valor pelo outro, a referência da proporção.

No círculo trigonométrico, o **cosseno** de um ângulo qualquer pode ser visualizado na projeção do seu raio (*por definição igual a 1*) sobre o eixo horizontal.

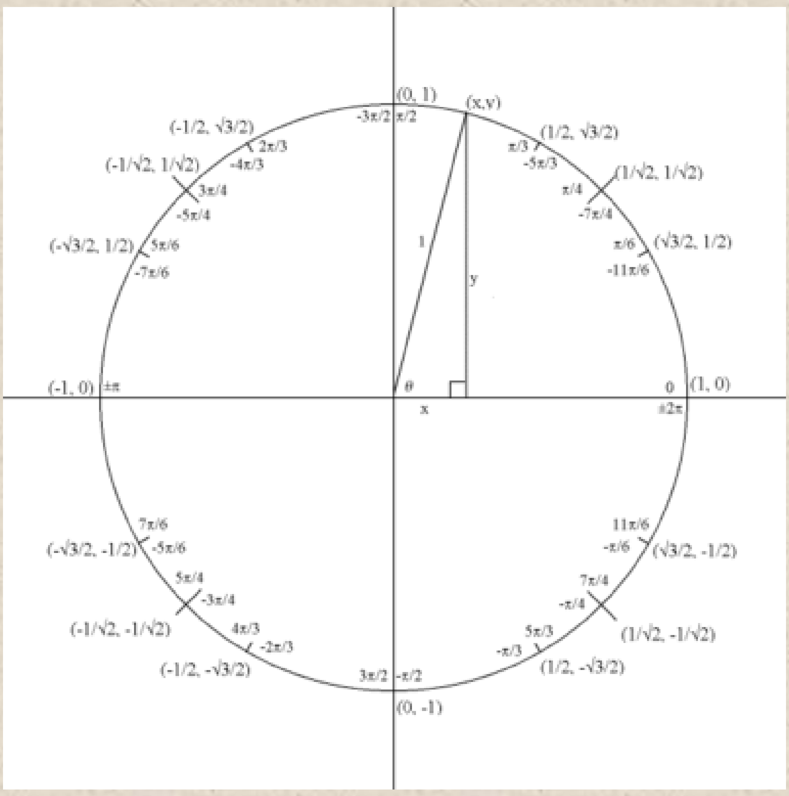
Como o **cosseno** é esta projeção, e o raio do ciclo trigonométrico é igual a 1, segue que, $\forall x \in \Re,\ -1 \leq \cos(x) \leq 1$, ou seja, a imagem do **cosseno** é o intervalo fechado [-1,1].

Tangente

Dado um triângulo retângulo, a **tangente** de um dos seus 2 ângulos agudos é a proporção entre o comprimento do cateto oposto a este ângulo e o comprimento do cateto adjacente a ele, calculada, como toda proporção, pela divisão de um valor pelo outro, a referência da proporção.

No círculo trigonométrico, o valor da **tangente** de um ângulo qualquer pode ser visualizado na reta vertical que tangencia este círculo no ponto em que ele corta o eixo horizontal do lado direito. Nesta reta tangente ao círculo trigonométrico, o valor da **tangente** trigonométrica de qualquer ângulo é representado pelo segmento que vai do ponto em que ela corta o eixo horizontal até o ponto em que ela corta a reta que contém o raio do círculo trigonométrico para o ângulo considerado. Para avaliar este valor, deve-se compará-lo com o raio do círculo trigonométrico que, por definição, é igual a 1, de preferência quando este raio se encontra sobre a parte superior do eixo ortogonal vertical. Observe que, enquanto o **seno** e o **coseno** são sempre menores do que o raio do círculo trigonométrico e, portanto, menores do que 1, a **tangente** trigonométrica pode ser tanto menor quanto maior do que 1.

Algumas relações



O círculo unitário

$$\operatorname{sen} A = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos A = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

Estas são as **mais importantes funções trigonométricas**; outras funções podem ser definidas tomando as razões dos outros lados de um triângulo retângulo, mas podem ser expressas em termos de seno e cosseno. São elas a tangente, secante, cotangente, e cossecante.

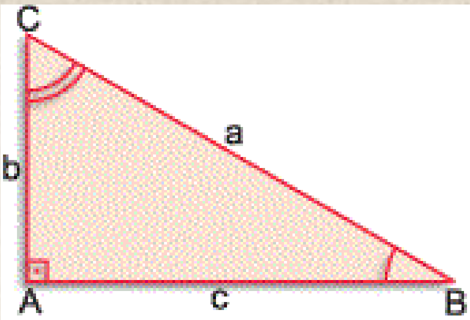
$$\tan A = \frac{sen\ A}{\cos A} = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$$

$$\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{hipotenusa}{cateto\ adjacente}$$

$$\cot A = \frac{\cos A}{sen\ A} = \frac{cateto\ adjacente}{cateto\ oposto}$$

$$\text{cosec}\, A = \frac{1}{sen\ A} = \frac{hipotenusa}{cateto\ oposto}$$

Até então, as funções trigonométricas têm sido definidas por ângulos entre 0 e 90 graus (*0 e π/2 radianos*) apenas. Usando um círculo unitário, pode-se estendê-los para todos argumentos positivos e negativos (*veja função trigonométrica*).



$$sen\ \hat{B} = \frac{b}{a} \qquad sen\ \hat{C} = \frac{c}{a}$$

$$\cos\ \hat{B} = \frac{c}{a} \qquad \cos\ \hat{C} = \frac{b}{a}$$

$$tg\ \hat{B} = \frac{b}{c} \qquad tg\ \hat{C} = \frac{c}{b}$$

$$cotg\ \hat{B} = \frac{c}{b} \qquad cotg\ \hat{C} = \frac{b}{c}$$

$$\sec\ \hat{B} = \frac{a}{c} \qquad \sec\ \hat{C} = \frac{a}{b}$$

$$cossec\ \hat{B} = \frac{a}{b} \qquad cossec\ \hat{C} = \frac{a}{c}$$

$$sen\ \hat{B} = \cos\ \hat{C}$$
$$\cos\ \hat{B} = sen\ \hat{C}$$

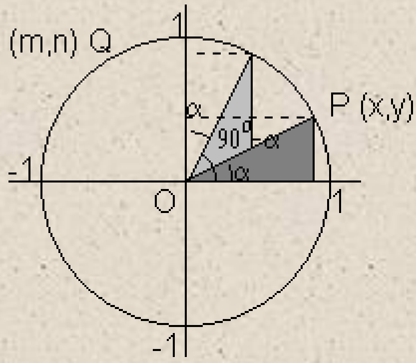
$$tg\ \hat{B} = cotg\ \hat{C}$$
$$cotg\ \hat{B} = tg\ \hat{C}$$

$$\sec\ \hat{B} = cossec\ \hat{C}$$
$$cossec\ \hat{B} = \sec\ \hat{C}$$

Observando atentamente no **círculo trigonométrico** cada uma das situações em causa, é possível concluirmos algumas relações importantes entre as relações trigonométricas de certos ângulos.

Ângulos do 1ª Quadrante

Ângulos Complementares: a e 90°- a



Os pontos P e Q do círculo trigonométrico, respectivamente associados a "a" e a 90-a, são simétricos em relação à reta da equação y = x.

Daí resulta que a abscissa de um é a ordenada do outro e reciprocamente, isto é,

$$\operatorname{sen}(90° - \alpha) = \cos\alpha$$

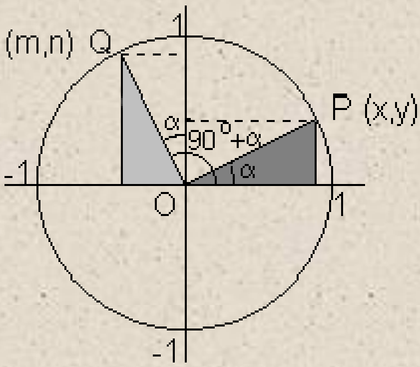
$$\cos(90° - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$$

$$\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{cotg}\alpha$$

$$\operatorname{cotg}(90° - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$$

Ângulos do 2º Quadrante

Ângulos que diferem de 90°: a e 90° + a



A abscissa de Q é simétrica da ordenada de P, e a ordenada de Q é igual à abscissa de P, isto é,

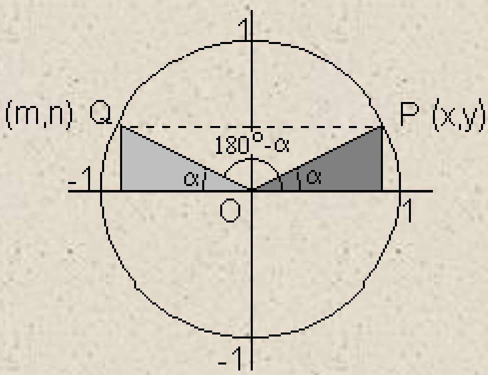
$$\text{sen}\,(90°+\alpha)=\cos\alpha$$

$$\cos\,(90°+\alpha)=-\text{sen}\,\alpha$$

$$\text{tg}\,(90°+\alpha)=-\text{cotg}\,\alpha$$

$$\text{cotg}\,(90°+\alpha)=-\text{tg}\,\alpha$$

Ângulos Suplementares: a e 180° - a



Os pontos P e Q do **círculo trigonométrico**, respectivamente associados a "a" e 180°- a, são simétricos em relação ao eixo das ordenadas. Daí resulta que as ordenadas de P e Q são iguais e as suas abscissas são simétricas, isto é,

$$\text{sen}\,(180°-\alpha)=\text{sen}\,\alpha$$

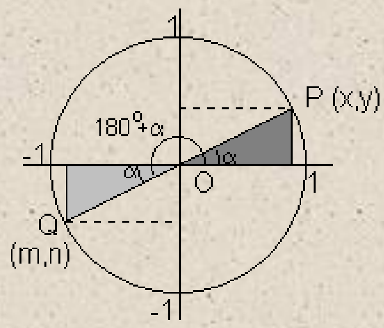
$$\cos\,(180°-\alpha)=-\cos\alpha$$

$$\text{tg}\,(180°-\alpha)=-\text{tg}\,\alpha$$

$$\text{cotg}\,(180°-\alpha)=-\text{cotg}\,\alpha$$

Ângulos do 3º Quadrante

Ângulos que diferem de 180º: a e 180° + a



Os pontos P e Q do círculo trigonométrico, respectivamente associados a “a” e a 180° + a, são simétricos em relação a O.

Daí resulta que as suas ordenadas e as suas abscissas são simétricas, isto é,

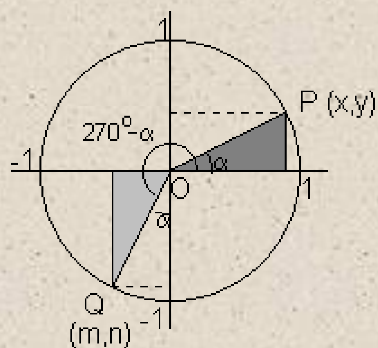
$$\text{sen}\,(180° + \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$$

$$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\text{tg}\,(180° + \alpha) = \text{tg}\,\alpha$$

$$\text{cotg}\,(180° + \alpha) = \text{cotg}\,\alpha$$

Ângulos que somados valem 270º: a e 270º - a



$$\text{sen}\,(270° - \alpha) = -\cos\alpha$$

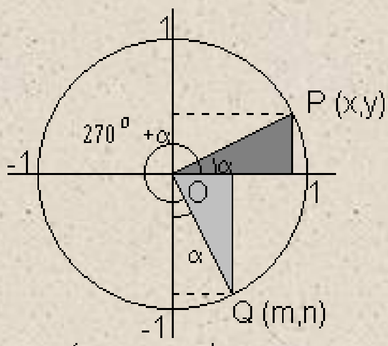
$$\cos(270° - \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$$

$$\text{tg}\,(270° - \alpha) = \text{cotg}\,\alpha$$

$$\text{cotg}\,(270° - \alpha) = \text{tg}\,\alpha$$

Ângulos do 4º Quadrante

Ângulos que diferem de 270º: a e 270º + a



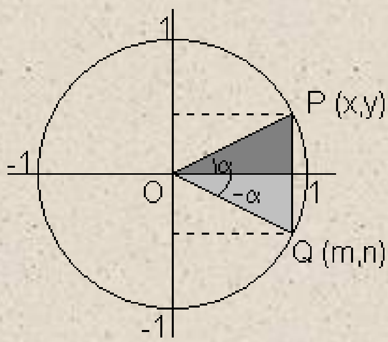
$$\text{sen}\,(270° + \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\cos\,(270° + \alpha) = \text{sen}\,\alpha$$

$$\text{tg}\,(270° + \alpha) = -\,\text{cotg}\,\alpha$$

$$\text{cotg}\,(270° + \alpha) = -\,\text{tg}\,\alpha$$

Ângulos Simétricos: a e -a



Os pontos P e Q do **círculo trigonométrico**, respectivamente associados a "a" e "-a", são simétricos em relação ao eixo das abscissas.

Daí resulta que as abscissas de P e Q são iguais e as suas ordenadas são simétricas, isto é,

$$\text{sen}\,(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha$$

$$\cos\,(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\text{tg}\,(-\alpha) = -\,\text{tg}\,\alpha$$

$$\text{cotg}\,(-\alpha) = -\,\text{cotg}\,\alpha$$

OBS.: As relações que acabamos de estudar são válidas qualquer que seja a amplitude "a" do ângulo (em graus ou radianos).

Relógio de sol

Uma vez que as funções **seno** e **cosseno** tenham sido tabuladas (*ou computadas por uma calculadora*), pode-se responder virtualmente todas questões sobre triângulos arbitrários, usando a **lei dos senos** e a **lei dos cossenos**. Estas leis podem ser usadas para calcular os ângulos restantes e lados de qualquer triângulo bem como dois lados e um ângulo ou dois ângulos e um lado ou três lados conhecidos.

Alguns matemáticos acreditam que a trigonometria foi originalmente inventada para calcular relógios de sol, um tradicional exercício em antigos livros. Isto é também muito importante para a agrimensura.

Relógio de Sol

Teorema de Pitágoras

O **teorema de Pitágoras** estabelece que "A soma do quadrado das medidas dos catetos (*lados que formam o ângulo de 90°, neste caso a e b*) é igual ao quadrado da medida da hipotenusa (*lado oposto ao ângulo de 90°, ou c*)". Assim: $c^2 = a^2 + b^2$. Um corolário desse teorema é que se os dois catetos forem de mesmo tamanho, a hipotenusa vale o produto do cateto pela raiz quadrada de 2.

Aplicações da trigonometria

Existem diversas aplicações da trigonometria e das funções trigonométricas. Por exemplo, a **técnica da triangulação** é usada em astronomia para estimar a distância das estrelas próximas; em geografia e geologia para estimar distâncias entre divisas e em *sistemas de navegação por satélite*. As funções **seno** e **cosseno** são fundamentais para a teoria das funções periódicas, as quais descrevem as ondas sonoras e luminosas.

Campos que fazem uso da **trigonometria** ou **funções trigonométricas** incluem astronomia (*especialmente para localização de posições aparentes de objetos celestes, em qual a trigonometria esférica é essencial*) e portanto navegação (*nos oceanos, em aviões, e no espaço*), teoria musical, acústica, óptica, análise de mercado, eletrônica, teoria da probabilidade, estatística, biologia, equipamentos médicos (*por exemplo, Tomografia Computadorizada e Ultrassom*), farmácia, química, teoria dos números (*e portanto criptologia*), sismologia, meteorologia, oceanografia, muitas das ciências físicas, solos (*inspeção e geodesia*), arquitetura, fonética, economia, engenharia, gráficos computadorizados, cartografia, cristalografia e desenvolvimento de jogos.

Identidades Trigonométricas

Algumas equações envolvendo **funções trigonométricas** são verdade para todos os ângulos e são conhecidas como "**identidades trigonométricas**". Muitas expressam relações geométricas importantes. Por exemplo, as identidades Pitagoreanas são uma expressão do Teorema de Pitágoras. Aqui há algumas das identidades mais comumente utilizadas, assim como as fórmulas mais importantes conectando ângulos e lados de um triângulo arbitrário.

Fórmula fundamental da trigonometria e seus corolários

$$\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$\tan^2 A + 1 = \sec^2 A$$

$$1 + \cot^2 A = \csc^2 A$$

Identidades de soma e subtração

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(A \pm B) &= \operatorname{sen} A \cos B \pm \operatorname{sen} B \cos A \\
\cos(A \pm B) &= \cos A \cos B \mp \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \\
\tan(A \pm B) &= \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B} \\
\cot(A \pm B) &= \frac{\cot A \cot B \mp 1}{\cot B \pm \cot A}
\end{aligned}$$

Fórmulas da duplicação do ângulo

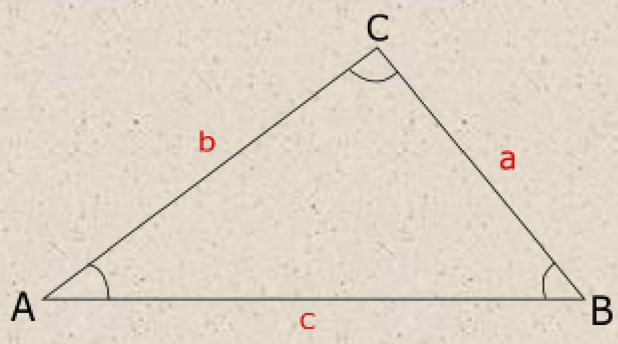
$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(2A) &= 2 \operatorname{sen} A \cos A \\
\cos(2A) &= \cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A \\
&= 2\cos^2 A - 1 \\
&= 1 - 2\operatorname{sen}^2 A \\
&= \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} \\
\tan(2A) &= \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} \\
&= \frac{2 \cot A}{\cot^2 A - 1} \\
&= \frac{2}{\cot A - \tan A}
\end{aligned}$$

Fórmulas da divisão do ângulo em dois

Note que $\pm$ significa que pode haver qualquer dos dois sinais, dependendo do valor de $A/2$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} \frac{A}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} \\
\cos \frac{A}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}} \\
\tan \frac{A}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}
\end{aligned}$$

Identidades triangulares



As identidades que se seguem referem-se a um triângulo com ângulos A, B e C e lados de comprimentos a, b e c, como na figura ao lado. Repare que o lado oposto ao ângulo A é o de comprimento a, o lado oposto ao ângulo B é o de comprimento b e o lado oposto ao ângulo C é o de comprimento c.

Lei dos senos

A **lei dos senos** para um triângulo arbitrário diz:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c},$$

ou equivalentemente:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R$$

Lei dos cossenos

A **lei dos cossenos** (*também conhecida como fórmula dos cossenos*) é uma extensão do teorema de Pitágoras para triângulos arbitrários:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C,$$

ou equivalentemente:

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

o teorema de pitágoras é um caso particular da Lei dos Cossenos, quando o cosseno de 90°é 0.

Lei das tangentes

A **lei das tangentes**:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{tan\left[\frac{1}{2}(A+B)\right]}{tan\left[\frac{1}{2}(A-B)\right]}$$

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{tan\left[\frac{1}{2}(B+C)\right]}{tan\left[\frac{1}{2}(B-C)\right]}$$

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{tan\left[\frac{1}{2}(A+C)\right]}{tan\left[\frac{1}{2}(A-C)\right]}$$

Como saber o ângulo interno de um triângulo retângulo

Sendo:

$$tan(A) = \frac{sen(A)}{cos(A)}$$

em que:

- Sen(A) é comprimento do cateto oposto e
- Cos(A) A o comprimento do cateto adjacente.

A tangente inversa:

$tan^{-1}(A)$

ou:

$$\arctan\left(\frac{sen(A)}{\cos(A)}\right)$$

é o ângulo interno.

Fórmulas Trigonométricas

Fórmula Fundamental

$$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Fórmulas Secundárias

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\text{cotg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha}$$

$$1 + \text{tg}^2\,\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha$$

$$1 + \text{cotg}^2\,\alpha = \frac{1}{\text{sen}^2\,\alpha} = \text{cosec}^2\,\alpha$$

$$\text{tg}\,\alpha \times \text{cotg}\,\alpha = 1$$

Fórmulas de Adição

$$\text{sen}\,(x \pm y) = \text{sen}\,x \times \cos y \pm \text{sen}\,y \times \cos x$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \times \cos y \mp \text{sen}\,x \times \text{sen}\,y$$

$$\text{tg}\,(x \pm y) = \frac{\text{tg}\,x \pm \text{tg}\,y}{1 \mp \text{tg}\,x \times \text{tg}\,y} \left(x \pm y \neq \frac{\pi}{2} + \text{k}\pi, \text{k} \in Z\right)$$

$$\text{cotg}\,(x \pm y) = \frac{\text{cotg}\,x \times \text{cotg}\,y \mp 1}{\text{cotg}\,y \pm \text{cotg}\,x} \left(x \pm y \neq \text{k}\pi, \text{k} \in Z\right)$$

Fórmulas de Duplicação

$$\text{sen}\,(2x) = 2 \times \text{sen}\,x \times \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \text{sen}^2\,x = 1 - 2 \times \text{sen}^2\,x = 2 \times \cos^2 x - 1$$

$$\text{tg}\,(2x) = \frac{2\,\text{tg}\,x}{1 - \text{tg}^2\,x} \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \text{k}\pi \wedge \frac{\pi}{4} + \frac{\text{k}\pi}{2}, \text{k} \in Z\right)$$

$$\text{cotg}\,(2x) = \frac{\text{cotg}^2\,x - 1}{2\,\text{cotg}\,x} \left(x \neq \frac{\text{k}\pi}{2}, \text{k} \in Z\right)$$

Fórmulas de Bissecção

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x$$

Fórmulas de Transformação

$$\operatorname{sen} x \pm \operatorname{sen} y = 2 \times \operatorname{sen}\frac{x \pm y}{2} \times \cos\frac{x \mp y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \times \cos\frac{x+y}{2} \times \cos\frac{x-y}{2}$$

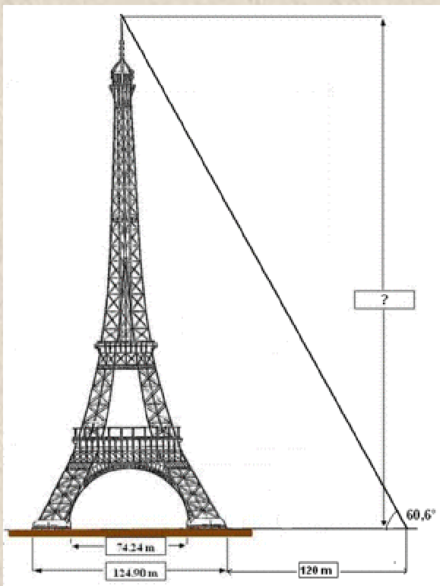
$$\cos x - \cos y = -2 \times \operatorname{sen}\frac{x+y}{2} \times \operatorname{sen}\frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{sen} x \times \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$$

$$\operatorname{sen} x \times \cos y = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(x-y) + \operatorname{sen}(x+y)\right]$$

Obs.: As fórmulas anteriores não são válidas se os denominadores tomarem valores nulos.

Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo



Bibliografia

- Christopher M. Linton (2004). From Eudoxus to Einstein: A History of Mathematical Astronomy. Cambridge University Press.
- Christopher Mark Linton (2006) "The Trigonometric... and His Live.
- Ribeiro, Thyago. *Lei dos Senos e dos Cossenos*. Infoescola. Página visitada em 25 de fevereiro de 2012.
- Weisstein, Eric W. "Trigonometric Addition Formulas". Wolfram Math World.